La mer 33: 227-232, 1995
Société franco-japonaise d'océanographie, Tokyo

海の表面波と基本流の相互作用についてⅡ*
～粘性のある場合～*

松島　晟**・冨塚　明**・古賀　雅夫**・後藤　信行**

On the interaction between a surface wave and a basic current in the sea Ⅱ*

Akira MATSUSHIMA**, Akira TOMIZUKA**, Masao KOGA** and Nobuyuki GOTO**

Abstract: Present authors study the effect of viscosity on a non-linear interaction between a basic lateral shear flow and a neutral surface wave (or a short wave) progressing on the surface of the sea in the direction parallel to the basic flow (the direction of which is taken as a y-coordinate).

The following results are obtained.

(i) For a wave progressing with a non-zero angular wave vector in a basic non-shear flow, or with a zero angular vector in a basic shear flow, there exist two groups of waves.

One group is named as a quasi outer gravity wave mode and the other named as a viscous outer gravity mode in the present paper and each group does not interact with its own basic flow. A quasi outer gravity wave is almost not influenced by viscosity, and therefore even in a viscous fluid behaves almost same as a gravity wave inviscid and non-basic flow. On the otherhand, a viscous outer gravity wave appears due to the existance of viscosity and may progress in a positive or negative x-direction with decreasing the amplitude, spatially.

(ii) For a wave progressing with a non-zero angular wave vector in a basic shear flow, there also exist two groups of waves corresponding to a quasi and viscous outer gravity wave mode.

Waves corresponding to a quasi outer gravity wave mode consist of two kinds of waves and are influenced only by the interaction. If $\alpha k_y/\Omega > 0$ (where α, k_y and Ω are a shear, the y-component of angular wave vector, and a Doppler angular frequency, respectively), one kind may progress in a positive x-direction with increasing amplitude and the other in a negative x-direction with decreasing amplitude and vice versa.

Waves corresponding to a viscous outer gravity wave mode are basically the same as viscous outer gravity waves mentioned in (i) and the effect of the interaction is furthermore added to the results obtained in (i). As a result there appears a new possibility that the amplitude of a wave may increase in some case.

(iii) In the special case where a damping factor showing the vertical structure of a wave m is almost equal to k_y, there exist three kinds of waves influenced by both the interaction and viscosity, if $|\Omega|^3 \ll \nu \alpha^2 k_y^2$ where Ω, ν and α are Doppler angular frequency, the coefficient of kinematic viscosity and a shear, respectively. For example, if $\alpha k_y > 0$, one of three kinds may progress in a positive x-direction keeping the amplitude constant and the rest in a negative direction with either increasing or decreasing amplitude.

1. 緒　言

著者たちは前論文（松島　他，1995）で水平方向に伝播する表面波と水平方向に shear を持つ基本流との非線形相互作用を，粘性のない流体で調べた。ここではさらに相互作用における粘性の効果を調べる。粘性の効果については内部重力波の鉛直伝播について HAZEL

* 1995年10月13日受理，Received Octover 13, 1995
** 長崎大学教養部物理学教室 〒852長崎市文教町 1-14
Department of Physics, Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University, 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki City, Nagasaki, 852 Japan

(1967) も議論している。その中での結論の1つに，内部重力波の鉛直伝播では相互作用における粘性の効果は critical level では特に強いということである。著者たちの得た結論の1つでは，表面波（外部重力波）では相互作用における粘性の効果も，むしろ critical level ではあまり効かないということである。

記号

x ：水平方向の座標軸
(x-coordinate normal to the basic flow on the sea surface)

y ：水平方向の座標軸で，基本流の方向にとる
(y-coordinate parallel to the basic flow on the sea surface)

z ：座標軸で鉛直上向きにとる
(z-coordinate directed upward)

m ：波の鉛直方向の振幅の減衰係数
(damping factor showing the structure in the z-direction of a surface wave)

k_y ：y 方向の波の角波数
(angular wave number in the y-direction)

ω ：波の角周波数
(angular wave frequency)

V ：基本流の y 成分で $V=\alpha x+V_0$
(basic flow. V_0; constant component)

α ：基本流の shear
(a shear of basic flow)

M ：$M=\sqrt{m^2-k_y^2}$

Ω ：$\Omega=\omega-k_yV_0$

ν ：動粘性係数
(the coefficient of kinematic viscosity)

u ：波の速度のx成分
(x-component of the velocity following a wave)

v ：波の速度のy成分
(y-component of the velocity following a wave)

w ：波の速度のz成分
(z-component of the velocity following a wave)

p ：波による圧力
(pressure following a wave)

ρ ：液体の密度
(density of the fluid)

c_y ：波の y 方向の位相速度
(phase velocity in the y-direction of a wave)

2. 表面波と基本流との相互作用における粘性の効果について

粘性がある場合，時間がたつと粘性の効果により，波のエネルギーは失われていく。しかし，波が数波長通過する時間間隔では，このエネルギー消失はあまり大きくはないであろう。したがって表面波を時間的には中立波として取り扱うことにする。

さて，表面波と基本流の相互作用を表す場合であるが，著者たちの前の論文（松島他，1995）の（9）から，

$$i(\omega-k_yV)\left\{\frac{d^2A}{dx^2}+(m^2-k_y^2)A\right\}=$$

$$-2\alpha ik_y\frac{dA}{dx}+\nu\left\{\frac{d^4A}{dx^4}+2(m^2-k_y^2)\frac{d^2A}{dx^2}+(m^2-k_y^2)^2A\right\} \quad (1)$$

また $A(x)$ は次式で定義されている。

$$\frac{p}{\rho}=A(x)e^{mz}e^{i(\omega t-k_yy)} \quad (2)$$

(2) では $m>0$ とし，m は $z\to-\infty$ で，$\frac{p}{\rho}\to 0$ になるように選んである。ここでは著者たちは y 方向に進む波を取り扱う。

われわれは次の3つの場合について調べる。

（i）基本流に shear があり，波の角波数ベクトルが 0 の場合

（ii）shear はないが，波の角波数ベクトルが 0 でない場合

（iii）shear があり，波の角波数ベクトルが 0 でない場合。この場合は数学的に簡単にするために，shear も一定，基本流も $V=$一定$=V_0$とする。

これらの場合は $A(x)\propto e^{-iKx}$ とおくと，（1）から，

$$i\Omega(-K^2+M^2)=-2\alpha k_yK+\nu(K^4-2M^2K^2+M^4) \quad (3)$$

となる。

ここで Ω, M については，（i），（ii），（iii）でそれぞれ定義する。K は求める根である。

（i）の場合は $\alpha\neq 0$, $k_y=0$ であり，$M=m$, $\Omega=\omega$ である。

（ii）の場合は $\alpha=0$, $k_y\neq 0$ であり，$M=\sqrt{m^2-k_y^2}$, $\Omega=\omega-k_yV_0$ である。

（iii）の場合は $\alpha\neq 0$, $k_y\neq 0$ で $V=V_0=$一定で，$M=\sqrt{m^2-k_y^2}$, $\Omega=\omega-\kappa_yV_0$ である。

さらに（i），（ii）の場合では上式は

$$(K^2-M^2)\{\nu(K^2-M^2)+i\Omega\}=0 \qquad (4)$$

となる。1つのK^2の根は$K^2=M^2$である。

ここで波と基本流の相互作用は主に2つに分けて考えることができる。そのうちの1つの効果は Doppler shift の効果であり，角周波数ωを Doppler 角周波数 $\Omega(=\omega-k_yV_0)$ に変える。いま1つは項αk_yに比例した形で効いてくる効果である。以降において著者たちは Doppler shift の効果はいちいち述べないことにする。

さて，（ i ），（ ii ）の場合のこのKの解には相互作用の効果と粘性の効果は全くない。この種の波を準外部重力波モードと呼ぶ。

次に，他のKの根は（4）より

$$K^2-M^2=-i\Omega/\nu \qquad (5)$$

と求められる。

（5）で表される波は粘性と重力に起因する波である。著者たちはこの種の波を粘性外部重力波モードと名づける。もちろん，この種の波は粘性がなければ存在しないことは（3）から明らかである。

ここで粘性の効果を概観すれば，まず，粘性外部重力波が新たに現れる。さらに，仮に粘性が非常に大きな場合には（3）から$\nu(K^2-M^2)^2=0$となり，K^2の解は粘性がない場合の外部重力波と同一になる。もちろん，この場合には中立波近似は成り立たなくなるであろう。すなわち，粘性のxの正方向の波数Kに対する効果はもちろん粘性が0でも効かないし，また非常に大きくても効かないということである。

さて（5）より，$K=\sqrt{M^2-i\Omega/\nu}=k_x+i\mu$ とおく。ただしk_x, μは実数とする。また，$K=-\sqrt{M^2-i\Omega/\nu}$の場合も全く同じように議論できる。それぞれ$\mu$と$k_x$は以下の通りである。

$$k_x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}} \qquad (6)$$

$$\mu=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega}{\nu}/\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}}$$

μとk_xの符号は同順で，またk_xの上下の符号はKの正負の符号に対応しているとする。

すなわち，粘性外部重力波モードでは$k_x>0$のとき$\mu<0$となり，また$k_x<0$のとき$\mu>0$となる。いいかえれば，$k_x>0$のときは，波がxの正方向に進行する場合で$\mu<0$，すなわち波の振幅は減少する。また，$k_x<0$のときは波が負の方向に進行していて，やはり振幅は減少することを意味する。

（ i ），（ ii ）の場合，いずれの場合も（5）の解は粘性により，波の振幅が場所的に減少して行くことを示している。

とくに（ ii ）の場合には波の基本流方向の位相速度成分が，基本流の速度とほとんど一致するような波に対しては critical な条件となる。このような近傍では

$$k_x^2 \fallingdotseq (m^2-k_y^2)+\frac{(\omega-k_yV_0)^2}{4\nu^2(m^2-k_y^2)}$$

となる。また

$$\mu^2 \fallingdotseq \frac{(\omega-k_yV_0)^2}{4\nu^2(m^2-k_y^2)}$$

となる。したがって，$(\omega-k_yV_0)^2$ と $\nu^2(m^2-k_y^2)$ のかねあいで粘性の効き方がきまる。critical layer では，

$$k_x^2=m^2-k_y^2,\ \mu=0$$

となり，粘性は効かない。

とくに$M^4\gg\Omega^2/\nu^2$の場合には

$$k_x=\pm M$$

$$\mu=\mp\frac{\Omega}{2M\nu}$$

粘性が大きいと$k_x=\pm M$, $\mu\fallingdotseq 0$となり，大きな粘性の効果は，この解にあまり効かない。

$M^4\ll\Omega^2/\nu^2$の場合には

$$k_x=\pm\sqrt{(M^2+\Omega/\nu)/2}\fallingdotseq\pm\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$$

$$\mu=\mp\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$$

この場合，$k_x=-\mu$となり，この解は小さい粘性が大いに効いてくる。したがって，この解でも大きな粘性はあまり効かなく，小さな粘性は大いに効果を及ぼす。またx方向の角波数は$\sqrt{\dfrac{\Omega}{2\nu}}$である。

そこで（ i ），（ ii ）の一般解は，

$$A(x)=A_1e^{-iK_1x}+A_2e^{iK_1x}+A_3e^{-i(K_2+\mu_2)x}+Ae^{i(K_2+\mu_2)x}$$

である。ただし，

$K_1=M$ ：準外部重力波

$$K_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}}$$

$$\mu_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega}{\nu}/\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}}$$ ：粘性外部重力波

つぎに（ iii ）の場合について調べる。

粘性$\nu=0$の場合はすでに前の論文で正確に調べられた。ここでは$V=V_0=$一定としながら，shear も取り入

れている。すなわち，$\nu=0$ では（3）から

$$K^2+2i\alpha k_y K/\Omega-M^2=0 \tag{7}$$

で，根は

$$K=\pm\sqrt{M^2-\alpha^2k_y^2/\Omega^2}-i\alpha k_y/\Omega \tag{8}$$

である。この場合の一般解は

$$A(x)=e^{-\alpha k_y x/\Omega}(\mathrm{A}_1 e^{i\varepsilon x}+A_2 e^{-i\varepsilon x}) \tag{9}$$

となる。ただし $\varepsilon=\sqrt{M^2-\alpha^2k_y^2/\Omega^2}$ とする。

$M^2>\alpha^2k_y^2/\Omega^2$，すなわち，$m^2-k_y^2>\dfrac{\alpha^2k_y^2}{(\omega-k_yV_0)^2}$ の場合には，（8）は shear によって x 方向の波数が modify された波で，振幅も変化する。すなわち，$\alpha k_y/\Omega>0$ では，1つの波はxの正方向に進行し，振幅は減少する。いま1つの波は負の方向に進み，振幅は増大する。$\alpha k_y/\Omega<0$ では1つの波は x の正の方向に進み，振幅は増大し，いま1つの波は負の方向に進み，振幅は減少する。

$M^2<\alpha^2k_y^2/\Omega^2$ の場合には，波の解は存在できなく，しみわたる解のみである。すなわち，波は x 方向に進行できない。

この（iii）の場合は α＝一定，V＝一定の近似を用いているが，われわれは前の論文の2－(iv) で V が x の一次関数である場合を厳密に解いている。

（9）と前の論文の2－(iv) を比較すると，三角関数を指数で表現している部分も，その他の部分も大きく異なってみえる。1つの違いは，少なくとも前の論文では前進する波も，後退する波も，振幅は増大すること，またどのような場合にも伝播する波は存在する。また位相も変化する。しかし，これらの解の2つの結果を比較することによって，どのような場合に近似がよく成り立つかがわかる。

さて，本題に戻って，粘性がある場合であるが，まず準外部重力波の場合を調べる。準外部重力波の解である $K^2-M^2=0$ を用いると（3）から

$$K^2+2i\alpha k_y K/\Omega-M^2=0 \tag{10}$$

となる，この式は（3）で粘性 $\nu=0$ とした式，すなわち（7）と完全に一致する。したがって，準外部重力波では，この程度の近似では粘性の効果は全く効かない。(10) は準外部重力波に相互作用の効果が入った式である。

つぎに粘性外部重力波の場合を調べる．この場合に対する解（5）を用いて（3）を近似すると

$$K^2+2i\alpha k_y K/\Omega-M^2+i\Omega/\nu=0 \tag{11}$$

となる。(11) は粘性外部重力波に相互作用の効果が入った式である。

(10) については（7）と同じになり，すでに調べられているので検討は省略する。粘性外部重力波については (11) からKの値は

$$K=\pm\sqrt{M^2-\alpha^2k_y^2/\Omega^2-i\Omega/\nu}-i\alpha k_y/\Omega$$

となる。

$$M^2\gg\alpha^2k_y^2/\Omega^2 \tag{12}$$

のばあいには

$$K\fallingdotseq\pm\sqrt{M^2-i\Omega/\nu}-i\alpha k_y/\Omega$$

となる。上式の前項は（5）で調べられている。その結果から

$$K\text{の実部}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}}=\pm K_2 \tag{13}$$

$$K\text{の虚部}=-\alpha k_y/\Omega\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Omega}{\nu}\Big/\sqrt{M^2+(M^4+\Omega^2/\nu^2)^{1/2}}$$
$$=-\alpha k_y/\Omega\mp\mu_2$$

である。

この場合，波の x 方向の波数には相互作用は効くが，振幅には，波長よりとくに効く。

$\Omega^2/\nu^2\ll M^4$ の場合，すなわち $|\Omega/\nu|\ll M^2$ かつ $M^2\gg\alpha^2k_y^2/\Omega^2$ の場合はMを正として

$$K\text{の実部}=\pm M$$

$$K\text{の虚部}=-\frac{\alpha k_y}{\Omega}\mp\frac{\Omega}{2M\nu}$$

となる。

$|\Omega/\nu|\gg M^2\gg\alpha^2k_y^2/\Omega^2$ の場合には

$$K\text{の実部}=\pm\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\ ;\ \Omega>0\ \text{の場合}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{-\Omega}{2\nu}}\ ;\ \Omega<0\quad〃$$

$$K\text{の虚部}=-\frac{\alpha k_y}{\Omega}\mp\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}\ ;\ \Omega>0\ \text{の場合}$$
$$=-\frac{\alpha k_y}{\Omega}\pm\sqrt{\frac{-\Omega}{2\nu}}\ ;\ \Omega<0\quad〃 \tag{13$'$}$$

となる。

これから2つの波もやはり大きな粘性は効かないが，小さい粘性に効く解である。基本的には（i），（ii）の

場合と似ている。(i), (ii) と異なるのは, (i), (ii) の結果にさらに波と基本流の相互作用の効果が加わることである。したがって相互作用と粘性の効果のかねあいで, 振幅の増大, 減少が定まる。すなわち (13) から $\alpha k_y/\Omega>0$ とすると $\alpha k_y/\Omega>\mu_2$ の場合には, x の負の方向に行く波は, 相互作用の効果により, (i), (ii) と違って逆に振幅が増加する。また $\alpha k_y/\Omega<\mu_2$ の場合には, x の負の方向に進む波は, やはり振幅は減少する。x の正方向に進む波では, いずれの場合も振幅は減少する。ただ減衰の割合が激しくなる。また $\alpha k_y/\Omega<0$ の場合には x の正方向に進む波は $|\alpha k_y/\Omega|>\mu_2$ では, 逆に振幅が増加し, $|\alpha k_y/\Omega|<\mu_2$ で振幅は減衰する。x の負の方向に進む波では, いずれの場合も振幅は減少するが, 減衰の割合は激しくなる。また, この場合では critical levelでは条件 (12) を満足しないであろう。

次に,

$$M=\sqrt{m^2-k_y^2} \tag{14}$$

がとくに小さい場合を調べる。とくにここでは$M=0$としよう。先に進む前に$M=0$でのいままでの結果をまとめておく。

粘性のない場合は, 前の論文より, 波の型の解は存在しない。すなわちx方向には波は伝播しない。

粘性がある場合についてはこの論文の (i), (ii) の場合, (6) から振幅が変化して伝播する波が存在する。

さて (iii) の場合であるが, 準外部重力波に対する近似式 (10) もまた, 粘性外部重力波に対する近似式 (11) も近似が良くない場合もあるので (3) をもとに議論を進める。

(3) から

$$K\left(K^3+\frac{i\Omega}{\nu}K-\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right)=0 \tag{15}$$

となる。さらに

$$\left|\frac{\Omega}{\nu}\right|^3\ll\left|\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right|^2 \tag{16}$$

の条件の場合には

$$K^3-\frac{2\alpha k_y}{\nu}=0 \tag{17}$$

となる。ここで

$$\gamma=\left(\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right)^{1/3}$$

とおくと (17) の根は

$$K=\gamma,\ \gamma\beta,\ \gamma\beta^2$$

である。ただし, $\beta^3=1$ で

$$\beta=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\ \beta^2=\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$$

である。またこの根で調べると, 条件 (16) を満足していることがわかる。これらの波には粘性と相互作用がよく効いている。

さらに, $\alpha k_y>0$ の場合は, $\gamma>0$ となり, 根γは振幅は変化しない, 正の方向に進む波を表す。他の根, $\gamma\beta$, $\gamma\beta^2$ は共に x の負の方向に進み, 前の根は振幅が減衰する解を, 後の解は増大する解をそれぞれ表す。これら3つの根の場合, x 方向の波の角波数はMが0であるから, $\left(\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right)^{1/3}$ またはこれらの半分である。

また critical level で特別に波のエネルギーの吸収, 放出があるわけではない。$\alpha k_y<0$ の場合は振幅が一定の波はxの負の方向に進み, 残り2つの波は共にxの正の方向に進み, 1つは振幅が増加し, 1つは減衰する。

次に,

$$\left|\frac{\Omega}{\nu}\right|^3\gg\left|\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right|^2 \tag{18}$$

の場合には(5)は

$$K\left(K^2+\frac{i\Omega}{\nu}\right)=0$$

となる。$\Omega>0$ とすれば, この根は$K=0$の他に

$$K=\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,e^{-i\pi/4}=\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,\frac{(1-i)}{\sqrt{2}} \tag{19}$$

$$K=\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,e^{-3i\pi/4}=\sqrt{\frac{\Omega}{\nu}}\,\frac{(-1+i)}{\sqrt{2}} \tag{20}$$

である。この場合の波の角波数は $\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$ である。

(19) の根は波が x の正の方向に進み, 振幅は減衰する解であり, (20)の根はxの負の方向に進んで, やはり振幅が減衰する解を表す。この根で調べると条件 (18) を満足することがわかる。しかし, 条件 (14) は現実にはMが非常に小さくないと満足しないであろう。

最後に$\Omega<0$では, Kの根は

$$K=\sqrt{\frac{-\Omega}{\nu}}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}},\ -\sqrt{\frac{-\Omega}{\nu}}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

となる。前者の根は, xの正の方向に進行して, 振幅が増大し, 後者の根はxの負の方向に進行して, 振幅が増大する解である。$\Omega=\omega-k_yV_0=k_y\ (c_y-V_0)<0$ の場合, すなわち, $k_y>0$として, 波のy方向の位相速度が, 基本流V_0より遅い場合, なおかつ, $m^2-k_y{}^2\fallingdotseq 0$ を満足する場合は, 基本流のエネルギーが波のエネルギーに変

わると考えられる。また (19), (20), (21) は (13)' すなわち，粘性外部重力波に対する式からも出てくる。

3. 結　論

この論文では，水平にshearのある基本流と海の表面付近を水平に伝わる外部重力波（表面波）との非線形相互作用について，粘性の効果をとくに調べた。その結果は以下の通りである。

(i)　shear がないか，shear があっても波の角波数ベクトルが 0 の場合

この場合には 4 種類の波が存在し，(a) そのうち 2 つの波はxの負の方向に進行し，振幅の変化はなく，波と基本流は相互作用を行わない。このモードを準外部重力波モードと呼ぶ。(b) 残りの 1 つの波は x の正の方向に進む波で，いま 1 つは負の方向に進む波であり，共に振幅は減衰する。すなわち，これら 2 つの波は，波のエネルギーを基本流または，熱運動に吸収されると考えられる。しかも粘性が大いに効いている。このモードを粘性外部重力波モードと呼ぶ。

(ii)　shear があり，波の角波数ベクトルが 0 でない場合

次の 2 つの場合を調べた。

(A)　まず相互作用がない粘性流体の運動を基礎として，波と基本流の相互作用を取り入れて調べた。つぎに (B) 波の鉛直構造を示す減衰因子mと基本流方向の波の角波数 k_y がほとんど等しい場合について調べた。

(A)の場合：4 つの波が存在する。そのうち 2 つの波は準外部重力波モードに対応し，残りの 2 つは粘性外部重力波モードに対応した波である。

(a)　準外部重力波モードに対応した波は粘性が全くない場合と同じで，shear によってx方向の波数が modifyされ，振幅も変化する。例えば進行方向と振幅について考えてみる。

$M^2 > \alpha^2 k_y^2/\Omega^2$ の場合について，$\alpha k_y/\Omega > 0$ では 1 つの波はxの正の方向に進み，振幅は減衰する。またいま 1 つの波は x の負の方向に進み，振幅も増加する。$\alpha k_y/\Omega < 0$ では，1 つは x の正の方向に進み，振幅が増大する。いま 1 つは負の方向に進み，振幅は減衰する。また $M^2 < \alpha^2 k_y^2/\Omega^2$ の場合には波の解は存在しない。

(b)　粘性外部重力波モードに対応した波は x 方向の波数にも振幅にも波と基本流の相互作用も粘性も効く。とくに相互作用の効果は波数より振幅に効く。基本的には(i)−(b)と同じである。ただ，(i)−(b)と異なるのは，とくに振幅に相互作用の効果が加わることである。すなわち，振幅の増大・減少因子に $-\alpha k_y/\Omega$ が新しく現れる。したがって，例えば，$\alpha k_y/\Omega > 0$ の場合には，x の負の方向に進む波には，新たに振幅が増加する波の出現する可能性が生じ，同じく$\alpha k_y/\Omega < 0$ の場合にはxの正方向に進む波に，振幅が増大する波の出現もあり得ることになる。

(B)の場合：とくに $m^2 - k_y^2 \fallingdotseq 0$ の場合を調べた。$|\Omega|^3 \ll \nu\alpha^2 k_y^2$ の場合には 3 種類の波が存在する。この場合，$m^2 = k_y^2$ に注意するとこれらの波の x 方向の角波数は，$\left(\frac{2\alpha k_y}{\nu}\right)^{1/3}$ またはこれの半分である。これらの波には相互作用と粘性が共に効いている。

例えば $\alpha k_y > 0$ の場合では，(a) 1 つの波はxの正の方向に進行して，振幅は一定である。(b) 残りの 2 つは共に x の負の方向に進行し，1 つは振幅が増大し，今 1 つは振幅が減衰する波である。

$\alpha k_y < 0$ の場合では，振幅が一定の波はxの負の方向に進み，残りの 2 つの波は共に x の正の方向に進み，1 つは振幅が増加し，1 つは減衰する。

$|\Omega|^3 \gg \nu\alpha^2 k_y^2$ の場合には，2 つの波が存在する。これらの波は粘性外部重力波に由来する波であり，x 方向の角波数は $\sqrt{\frac{\Omega}{2\nu}}$ である。例えば$\Omega > 0$ とすれば，1 つは x の正の方向に進み，いま 1 つは x の負の方向に進行して共に振幅が減衰する波である。また $\Omega < 0$ では，1 つは x の正の方向に，1 つは x の負の方向に進んで，共に振幅が増大する波である。

最後に，表面波ではすべての場合で critical level の近傍でとくに波と基本流が相互作用を行うとは思えない。

文　献

HAZEL, P. (1967): The effect of viscosity and heat conduction on internal gravity waves at a critical level, J. Fluid Mech., 30, p.775.

松島　晟，冨塚　明，後藤信行，古賀雅夫 (1995)：“海面波と基本流との相互作用について I”，La mer, 33, 221–225.