La mer 29: 62-66, 1991
Société franco-japonaise d'océanographie, Tokyo

Laplace の Tidal equation

−continued fraction による解の収束性について−*

古賀　雅夫**・後藤　信行**・松島　晟**

On the Laplace's Tidal equation

−The convergence of solutions in the continued fraction method−*

Masao KOGA**, Nobuyuki GOTO** and Akira MATSUSHIMA**

Abstract: The continued fraction method for solution of Laplace's tidal equation introduced by HOUGH is studied on a uniform convergence of the solution in the case of zonally symmetric oscillations.
The following results are obtained:
1) The larger the angular frequency is, the more rapid the convergence of the solution becomes.
2) The convergence is rapid in the case of the smallest oscillational mode towards the south.
3) The convergence is not so good in the case of oscillations with a small frequency and a large mode towards the south. Therefore the good results will not be obtained.

1. 緒　言

Laplace の Tidal equation の解は主に 2 つの方法で調べられている。HOUGH (1897, 1898) によって導入された解法を，1 つは continued fraction によって解く方法で，今 1 つは matrix を用いて解く方法である。Matrix による解法は現在でも良く用いられているが (SILBERMAN, 1953; FLATTERY, 1967), continued fraction による解法について詳しく調べた論文は未だないように思われる。特に，その一様収束性を問題にした論文は全くない。Continued fraction による方法は，その形が非常に簡潔で，行列を解くための特別なサブルーチンも必要ではなく，また解くにも便利である。しかし，この方法で解くとき，収束性に問題があることがわかった。そこで，この問題点をあきらかにし，出来るだけ改善する方法を示す。この論文では東西方向に波数がゼロである場合について取り扱う。

* 1991年6月10日受理　Received June 10, 1991
** 長崎大学教養部物理教室，〒852 長崎市文教町 1-14
Department of Physics, Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University, Bunkyo-machi 1-14, Nagasaki, 852 Japan

2. 基礎方程式系

この論文の実際計算とのかねあいで Hough の方法の大略を述べる。まず，運動方程式系であるが，

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v \cos\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u \cos\theta = -\frac{1}{\rho}\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \tag{2}$$

$$g\rho = -\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3}$$

ここで，θ は余緯度，λ は経度，z は鉛直上向きの高度を示す。u，v はそれぞれ θ 方向，λ 方向の流速を示す。さらに，ρ と p は海水の密度と圧力を，ω は地球の自転の角度を表す。最後に，a と g は地球の半径，および，重力の加速度を示す。
連続の方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{h}{a\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}(u\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial \lambda}\right\} = 0 \tag{4}$$

である。h は海洋の深さで $h \ll a$ と仮定して良く，ζ は潮汐により生じた深さの変化を示す。
p を圧力とすれば，潮汐による攪乱がないときの圧力を $P(z)$ で表すと，次の関係式が成り立つ。

$$p=g\rho\zeta+P(z). \tag{5}$$

ここで，u，v，ζ が

$$uv\zeta\infty\ e^{i(\beta t+k\lambda)} \tag{6}$$

とすれば，(1)式と(2)式を用いると，(4)式は次のような方程式となる。

$$i\beta\zeta+\frac{gh}{a^2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\sin\theta\left(i\beta\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{2\omega\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\right)}{\beta^2-4\omega^2\cos^2\theta}\right]+\frac{\frac{i\beta}{\sin\theta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\lambda^2}-2\omega\cos\theta\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta\partial\lambda}}{\beta^2-4\omega^2\cos^2\theta}\right\}=0 \tag{7}$$

(7)式は大気潮汐においても出て来る式である。大気潮汐では β を与えて，equivalent depth h（変数分離定数）を求める問題になるが，海の潮汐では海の深さ h を与えて，自由振動数 β を求める問題となる。ここでは海の深さ h が不明なので，equivalent depth を求める問題で continued fraction の方法における問題点を調べてみる。

東西方向の波数 k がゼロの場合には，(7)式は

$$\zeta+\frac{gh}{4\omega^2a^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\frac{1-\mu^2}{f^2-\mu^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mu}\right]=0 \tag{7'}$$

となる。ここで $\mu=\cos\theta$，$f=\beta/2\omega$ とおいた。さらに(7)′式を解くために

$$\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}C_nP_n(\mu) \tag{8}$$

と展開して，(7)′式に代入すると(7)′式は

$$\frac{C_{n-2}}{(2n-1)(2n-3)}-L_nC_n+\frac{C_{n+2}}{(2n+3)(2n+5)}=0 \tag{9}$$

ただし，

$$L_n=\frac{f^2-1}{n(n+1)}+\frac{2}{(2n+3)(2n-1)}-\frac{gh}{4\omega^2a^2} \tag{10}$$

である。また，$P_n(\mu)$ は n 階のルジャンドル関数である。

ここであらたに，次の記号を用いる。

$$A_n=\frac{1}{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)} \tag{11}$$

$$H_n=\frac{A_{n+2}}{L_n-}\,\frac{A_n}{L_{n-2}-}\cdots\cdot \tag{12}$$

$$K_n=\frac{A_n}{L_n-}\,\frac{A_{n+2}}{L_{n+2}-}\cdots\cdot \tag{13}$$

すなわち

$$H_n=\frac{A_{n+2}}{L_i-H_{n-2}} \tag{14}$$

$$K_n=\frac{A_n}{L_n-K_{n+2}} \tag{15}$$

上記の記号を用いると(9)式は

$$L_n=H_{n-2}+K_{n+2} \tag{16}$$

と表せる。

3. 計算方法の概略

計算は，(16)式を満足するような固有値 R（$=gh/4\omega^2a^2$）を求めることになる。ここでは東西方向の波数がゼロの場合を取り扱っているので，固有値 R は南北方向の振動のモード n によって変化する。まず，第1次近似 R_1 は $H_{n-2}=0$，$K_{n+2}=0$ とおいて

$$L_n=0$$

を解く。(10)式よりすぐに R_1 は

$$R_1=\frac{f^2-1}{n(n+1)}+\frac{2}{(2n+3)(2n-1)} \tag{17}$$

となる。

第2次近似以後は，この固有値の近似 R_1 を用いて，L_i を計算し，K_{n+2}，H_{n-2} に適当な値を仮定して，近似を上げて行く。次に実際の計算に移る。

4. 収束性を調べる具体的計算方法とその結果

具体的計算方法として，Hough の例題に従って次の(a)，(b)，(c)の3通りの方法で調べた。この方法は概略で述べた方法により，固有値の第1次近似 R_1 を求め，さらに，R_1 を用いて，L_i を計算する。さらに，K_{n+2} の continued fraction の項であるが，これら L_i を用いて，K_{n+2} の計算に必要な continued fraction の項数をきめる。(a)，(b)，(c)の場合実際には項数は K_i で表すと $j=n+20$ となった。この項数よりさらに項数を増やして K_{n+2} を計算しても，実際には K_{n+2} の数値に全く影響を及ぼさない。つぎに，H_{n-2} の continued fraction の項数については，$n-2$ の値が小さい場合を取り扱うので，正確を期するときは，第一項（すなわち，H_1，または H_2）からすべて用いることにした。以上のことは(b)と(c)にいえることである。また，実際に調べた角振動数と南北方向の振動

のモードnは次のような場合である。

角振動数$1.4544\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$(1/2 太陽日の周期)では，赤道に対して反対称モード$n=1, 3, 5$, 対称モードでは$n=2, 4, 6$について計算した。

角振動数$2.1817\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ (1/3 太陽日の周期)では，反対称モードとして，$n=1, 3, 5, 7$, 対称モードは$n=2, 4, 6$の場合を計算した。

角振動数$1.4052\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ (1/2 太陰日の周期)では，反対称モードとして，$n=1, 3, 5$，対称モードでは$n=2, 4, 6$について調べた。

最後に，角振動数$1.99102\times10^{-7}\mathrm{sec}^{-1}$ (一年周期)については，反対称モード$n=1, 3, 5$，対称モード$n=2, 4, 6$について調べた。

a) この方法は第1次近似R_1については，既に述べた所であるが，第2次近似R_2は次のようにして求める。まず，K_{n+2}を次のように近似する。

$$K_{n+2}=\frac{A_{n+2}}{L_{n+2}} \tag{18}$$

$$H_{n-2}=\frac{A_n}{L_{n-2}} \tag{19}$$

もちろん，ここで$n-2\leqq0$なるときは，$H_{n-2}=0$とする。ここで，K_{n+2}, H_{n-2}の計算で必要なL_iはR_1を用いて計算する。このようにして計算したK_{n+2}, H_{n-2}の数値を(16)式に代入して，(16)式よりR_2を求める。第3次近似R_3以後は近似を一回行うごとにK_{n+2}の continued fraction の項数を1つずつ増やして行く。すなわち，第3次近似では

$$K_{n+2}=\frac{A_{n+2}}{L_{n+2}-A_{n+4}/K_{n+4}} \tag{20}$$

$$H_{n-4}\fallingdotseq\frac{A_{n-2}}{L_{n-4}}. \tag{21}$$

$$H_{n-2}=\frac{A_n}{L_{n-2}-H_{n-4}} \tag{22}$$

ここで，やはり$n-4\leqq0$なるときは，$H_{n-4}=0$を，また，$n-2\leqq0$なるときは，$H_{n-2}=0$とする。
また，第4次近似では

$$K_{n+2}=\frac{A_{n+2}}{L_{n+2}-A_{n+4}/(L_{n+4}-A_{n+6}/L_{n+6})} \tag{23}$$

$$H_{n-6}\fallingdotseq\frac{A_{n-4}}{L_{n-6}} \tag{24}$$

$$H_{n-4}=\frac{A_{n-2}}{L_{n-4}-H_{n-6}} \tag{25}$$

$$H_{n-2}=\frac{A_n}{L_{n-2}-H_{n-4}} \tag{26}$$

ここでも，やはりH_i ($i=n-2, n-4$, または$n-6$)は$i\leqq0$のときは$H_i=0$とする。

最後に，K_{n+2}における continued fraction の項数がK_jで$j=n+20$まで来ると，これ以上は continued fraction の項は増やさず，これ以後の近似計算では$j=n+20$までの項を用いて近似を繰り返すことにした。またH_{n-2}についてもH_jについて初めの項 (H_1 またはH_2) まで来ると，H_{n-2}については全ての項を用いて計算した。計算結果は

(i) 角振動数$1.4544\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ (1/2 太陽日の周期) では，反対称モードでは$n=1$に対して，固有値$R=0.4026\mathrm{E}+00$となり，収束も非常に速かった。$n=3$の場合も収束は良く，固有値$=0.4460\mathrm{E}-01$が得られた。$n=5$では，一定の値に収束しなかった。したがって，固有値は得られなかった。つぎに対称モードでは$n=2$は収束も速く，固有値$=0.10046\mathrm{E}+00$が得られたが，$n=4$では収束が遅く21回の逐次近似では殆ど収束しているが4ケタの精度には収束しなかった。$n=6$では収束せず，固有値は得られなかった。

(ii) つぎに，角振動数$2.1817\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ (1/3 太陽日の周期) の場合には，反対称モード$n=1, 3, 5, 7$いずれの場合も，収束は速く，それぞれ，固有値として 0.12011E+01, 0.14722E+00, 0.5789E−01, 0.3086E−01 が得られた。また，対称モードでは$n=2, 4, 6$いずれも収束は速く，固有値 0.3036E+00, 0.8731E−01, 0.4122E−01 が得られた。

(iii) さらに，角振動数$1.4052\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ (1/2 太陰日の周期) では，反対称モードでは$n=1, 3$では収束が速く，固有値 0.3699E+00, 0.3941E−01 が得られた。$n=5$では収束しなかった。対称モードでは$n=2$は収束が速く，固有値 0.9008E−01 が得られたが，$n=4$では収束は非常に遅く21回の逐次近似で殆ど収束しているが，4ケタの精度の値は得られなかった。$n=6$は全く収束しなかった。

(iv) 最後に，角振動数$1.99102\times10^{-7}\mathrm{sec}^{-1}$ (一年周期) の場合は，反対称モードでは$n=1$の場合は収束は速く，固有値−0.12304E+00 が得られたが，$n=3, 5$では収束はしなかった。対称モードでは$n=2$

Table 1. The table shows the results of computations by the method (a). Here, ○ shows that we could get good results. △ shows that the convergence was slow to get satisfactory results. × shows that we could not get good results.
In the following tables, we use the same symbols.

angular freq.	mode n			
0.14544 E −03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	△	×	
0.21817 E−03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
	○	○	○	
0.14052 E−03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	△	×	
0.199102E−06	1	3	5	
	○	×	×	
	2	4	6	
	○	×	×	

のときは収束も速く，固有値−0.7972E−01が得られたが，$n=4, 6$ では収束しなかった。これらをまとめて表したのが表1である。これらの結果から角振動数が大きければ収束は良く，また，南北方向の振動のモード n が最も小さい振動では，収束が非常によい。n が大きくなると収束が悪くなる。また，この方式の計算では K_{n+2}，H_{n-2} の continued fraction の項を最初の間1つずつ増す影響が後まで響くようである。

(b)　そこで，次のような方法を行った。(a)と殆ど同じであるが，第2次近似 R_2 の計算から，K_{n+2} 項の continued fraction の項を初めから，K_j として $j=n+20$ 項まで取り入れることにした。また，K_{n+2} の conitinued fraction の項は初めの項（H_1 または H_2）から用いることにした。以後の計算は全く(a)と同じである。計算結果を表で表すと表2のようになる。(a)および(b)の方法からいえることは $n=1$，または

Table 2. The table shows the results of computations by the method (b).
○: good, △: slow, ×: impossible.

angular freq.	mode n			
0.14544 E −03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	○	×	
0.21817 E−03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
	○	○	○	
0.14052 E−03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	○	×	
0.199102E−06	1	3	5	
	○	×	×	
	2	4	6	
	○	×	×	

Table 3. The table shows the results of computations by the method (c).
○: good, △: slow, ×: impossible

angular freq.	mode n			
0.14544 E −03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	○	×	
0.21817 E−03	1	3	5	7
	○	○	○	○
	2	4	6	
	○	○	○	
0.14052 E−03	1	3	5	
	○	○	×	
	2	4	6	
	○	○	×	
0.199102E−06	1	3	5	
	○	×	×	
	2	4	6	
	○	×	×	

$n=2$ 以外では収束が非常に悪いことである。ただし，1/3 日周期では収束は良い。この計算方法では各近似計算の階段での計算で正確な値が得られる筈であるが驚くべきことに収束が悪かった。

(c) そこで，収束を速めるために，固有値の各逐次近似に対して，残差 $E \equiv L_n - K_{n+2} - H_{n-2}$ を計算し，これらの残差が一次式で表せるとして，これまでに求めた二つの残差を用いて，次の残差を求め，この残差が零になるように，次の近似値を計算した。これらを式で表す。近似値 R_{i-2} とその残差 E_{i-2}，つぎの近似値 R_{i-1} とその残差 E_{i-1} とすると，求める次の i 番目の近似値 R_i は

$$R_i = \frac{E_{i-2}R_{i-1} - E_{i-1}R_{i-2}}{E_{i-2} - E_{i-1}} \tag{27}$$

から得られる。つぎに，この R_i に対して，残差 E_i を求めてさらに同じように逐次近似を続行する。ここで最初の R_1, R_2 が問題になるが，R_1 としては(a)の R_1 を，R_2 としては(b)の R_2 を用いて計算した。その結果は表 3 のようになった。(c)はかなり改善されていることがわかる。具体的に調べると，角振動数 $1.4052 \times 10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$ で $n=6$ では収束はするが，$n=4$ の場合と同じ値が得られ，角振動数 $1.99102 \times 10^{-7}\mathrm{sec}^{-1}$ の場合には，$n=3, 5$ 及び $n=6$ では収束はするが，それぞれ別のモードの固有値であることがわかる。

5. 結　言

以上の計算結果から，全体に角振動数が大きくなると逐次計算が速いこと，南北方向の振動数のモードが最も小さい場合には，いずれも速く収束すること，また，$L_n=0$ から得られる近似値は割合良い値であることもわかった。逆に，振動数が小さくて，モードが大きくなると，これらの方式では収束が非常に遅くなったり，全く収束しなくなったり，あるいは，全く別のモードの固有値に収束したりすることがわかった。(c)はかなり改善されているが，固有値が得られない場合がある。

文　献

FLATTERY, T. W.(1967): Hough Functions. Technical Report, No.21, Dept. of Geophysical Sciences, Univ. of Chicago.

HOUGH, S. S.(1897): On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Part I, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A189, p.201.

HOUGH, S. S.(1898): On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of tides. Part II, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A191, p.139.

SILBERMAN, L.(1953): A matrix method for computing atmospheric oscillations. Sci. Report, No. 3, Dept. of Meteorol. and Oceanogr., N. Y. University.