La mer 30: 365–372, 1992
Société franco-japonaise d'océanographie, Tokyo

Laplace の tidal equation の解（東西方向に zonal でない場合の解法：continued fraction による収束性）について*

松島　晟**・古賀雅夫**

On the solution of Laplace's Tidal Equation (The convergence of the solution by the continued fraction method in the non-zonal case towards the east)

Akira MATSUSHIMA** and Masao KOGA**

Abstract: In the previous works, we studied on the convergence of the solution by the continued fraction method proposed by HOUGH in the zonally symmetric case. There are three methods for solving Laplace's tidal equation using continued fraction when it is not zonally symmetric. In the present paper, we studied on one of the three methods. Generally speaking, this method was not so good. From the results of the calculations done here, however, the following were found.
i) The convergence of the solution becomes better as the angular frequency becomes larger.
ii) As the difference between n and k, where n is the wave mode towards the south and k is the wave number towards the east, becomes larger the convergence of the solution becomes worse. On the other hand, when $(n-k)=0$, or 1 we can get a good result in almost any case.

1. 緒　言

前論文では東西方向の wave number が零の場合について調べた．この論文では東西方向に zonal でない場合について調べる。zonal でない場合について HOUGH による continued fraction の方法（HOUGH, 1897, 1898）は 3 つの場合に大別される。ここではその 1 つの方法（LHK法と名付ける）について調べる。以下に述べるこの方法は，まだほとんど何も調べられていない。

2. Continued fraction による基礎方程式系の解法

ここで，HOUGH の論文にしたがって計算方法の概略を述べる。東西方向に zonal でない Laplace の tidal equation は次の様にまとめられる。

$$\frac{4\omega^2 a^2}{ghs^2}\zeta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\frac{(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\zeta}-s\mu\zeta}{k^2-s^2\mu^2}\right]-\frac{k^2\zeta}{(1-\mu^2)(k^2-s^2\mu^2)}+\frac{s\mu}{k^2-s^2\mu^2}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\mu}=0 \tag{1}$$

ただし

$$\mu=\cos\theta,\ s=\frac{2\omega k}{\beta}=\frac{k}{f}。 \tag{2}$$

また

$$f=\frac{\beta}{2\omega}。 \tag{3}$$

他の記号については前の論文を参照されたい。
ここで

$$\zeta=-\left\{(1-\mu^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}+s\mu\right\}\phi_1-(k^2-s^2\mu^2)\phi_2 \tag{4}$$

とおく。ただし，ϕ_1 および ϕ_2 は μ の任意の関数である。ϕ_1 および ϕ_2 の間に

$$(\nabla^2+s)\phi_1=2s^2\mu\phi_2 \tag{5}$$

* 1992年11月 7 日受理．Received November 7, 1992.
** 長崎大学教養部物理学教室，〒852 長崎市文教町 1–14
Department of Physics, Faculty of Liberal Arts, Nagasaki University, 1–14 Bunkyo-machi, Nagasaki City, Nagasaki, 852 Japan.

Table I. Results of convergence by the method (a2) with varying the wave mode n and keeping the wave number k constant.

angular freq.	0.14544 E-03			
wave number		mode n		
symmetric	2	4	6	8
$k=2$	○	○	×	×
antisymmetric	3	5	7	9
$k=2$	○	×	×	×
angular freq.	0.72720 E-04			
wave number		mode n		
symmetric	1	3	5	7
$k=1$	○	×	×	×
antisymmetric	2	4	6	8
$k=1$	○	○	×	×

Table II. Results of convergence by the method (a1) with varying the wave mode n and keeping the wave number k constant.

angular freq.	0.14544 E-03			
wave number		mode n		
symmetric	2	4	6	8
$k=2$	○	○	○	×
antisymmetric	3	5	7	9
$k=2$	○	○	×	×
angular freq.	0.72720 E-04			
wave number		mode n		
symmetric	1	3	5	7
$k=1$	○	×	○	○
antisymmetric	2	4	6	8
$k=1$	△	○	×	×

が成り立つように選ぶ。

また，さらに

$$\zeta=\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k P_n^k, \tag{6}$$

$$\phi_1=\sum_{n=k}^{\infty} D_n^k P_n^k, \tag{7}$$

$$\phi_2=\sum_{n=k}^{\infty} F_n^k P_n^k, \tag{8}$$

とルジャンドル陪関数でζ，ϕ_1およびϕ_2を展開する。すると，方程式(1)，(3)，(4)，(5)，(6)，(7)，(8)から次の方程式が得られる。

$$x_{n-2}^k C_{n-2}^k - L_n^k C_n^k + y_n^k C_{n+2}^k = 0. \tag{9}$$

ここで

$$x_n^k=\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{(2n+1)(2n+3)\{(n+1)(n+2)-2\omega k/\beta\}}, \tag{10}$$

$$y_n^k=\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{(2n+3)(2n+5)\{(n+1)(n+2)-2\omega k/\beta\}}, \tag{11}$$

$$L_n^k=-\frac{gh}{4\omega^2 a^2}+\Lambda_n^k。 \tag{12}$$

ただし，(12)式のΛ_n^kは

$$\Lambda_n^k=\frac{\beta^2}{4\omega^2}\frac{n(n+1)-2\omega k/\beta}{n^2(n+1)^2} - \frac{(n-1)^2(n-k)(n+k)}{n^2(2n-1)(2n+1)\{n(n-1)-2\omega k/\beta\}} - \frac{(n+2)^2(n-k+1)(n+k+1)}{(n+1)^2(2n+1)(2n+3)\{(n+1)(n+2)-2\omega k/\beta\}} \tag{13}$$

また，ここで新しい記号H_n^k，K_n^kを導入する。

$$H_n^k=\frac{x_n^k y_n^k}{L_n^k-}\frac{x_{n-2}^k y_{n-2}^k}{L_{n-2}-}\cdots\frac{x_k^k y_k^k}{L_k^k}\left[\text{または}\frac{x_{k+1}^k y_{k+1}^k}{L_{k+1}^k}\right] \tag{14}$$

Table Ⅲ. Results of convergence by the methods (b1),(b2),(c1),(c2),(c3) and (c4) with the results by the methods (a1) and (a2) for comparison.

angular freq.	0.14544 E-03				
symmetric			mode n		
	wave number	2	4	6	8
a1	$k=2$	○	○	×	×
a2	$k=2$	○	○	○	×
b1	$k=2$	○	○	×	×
b2	$k=2$	○	○	×	×
c1	$k=2$	○	○	○	×
c2	$k=2$	○	○	×($n=4$)	×($n=6$)
c3	$k=2$	○	○	×($n=8$)	×($n=6$)
c4	$k=2$	○	○	×($n=8$)	×($n=6$)
antisymmetric			mode n		
	wave number	3	5	7	9
a1	$k=2$	○	×	×	×
a2	$k=2$	○	○	×	×
b1	$k=2$	○	×	×	×
b2	$k=2$	○	○	×	×
c1	$k=2$	○	○	○	×
c2	$k=2$	○	○	×	×
c3	$k=2$	○	○	×	×
c4	$k=2$	○		×	×

Table Ⅲ-2

angular freq.	0.14052 E-03				
symmetric			mode n		
	wave number	2	4	6	8
a1	$k=2$	○	○	×	×
a2	$k=2$	○	○	○	×($n=6$)
b1	$k=2$	○	○	×	×
b2	$k=2$	○	○	×($n=8$)	×($n=14$)
c1	$k=2$	○	○	×($n=4$)	×($n=6$)
c2	$k=2$	○	○	×($n=4$)	×($n=10$)
c3	$k=2$	○	○	×($n=4$)	×($n=6$)
c4	$k=2$	○	○	×($n=4$)	×($n=6$)
antisymmetric			mode n		
	wave number	3	5	7	9
a1	$k=2$	○	×	×	×
a2	$k=2$	○	○	×($n=5$)	×($n=7$)
b1	$k=2$	○	×	×	×
b2	$k=2$	○	○	×($n=11$)	×($n=7$)
c1	$k=2$	○	×($n=3$)	×($n=13$)	
c2	$k=2$	○	○	×($n=11$)	×($n=7$)
c3	$k=2$	○	×($n=13$)	×	×($n=7$)
c4	$k=2$	○	○	×($n=13$)	×($n=15$)

$$K_n^k=\frac{x_{n-2}^k y_{n-2}^k}{L_n^k-}\,\frac{x_n^k y_n^k}{L_{n+2}^k-}\cdots \tag{15}$$

(14)，(15)式は，また，次のように表せる。

$$H_n^k=\frac{x_n^k y_n^k}{L_n^k-H_{n-2}^k}, \tag{16}$$

$$K_n^k=\frac{x_{n-2}^k y_{n-2}^k}{L_n^k-K_{n+2}^k} \tag{17}$$

これら H_n^k，K_n^kを用いると，(9)式は

$$L_n^k-H_{n-2}^k-K_{n+2}^k=0 \tag{18}$$

となる。この(16)式が Hough function とその固有値

Table Ⅲ-3

angular freq.	0.72720 E-04				
symmetric			mode n		
	wave number	1	3	5	7
a1	$k=1$	○	×	×	×
a2	$k=1$	○	×	○	○
b1	$k=1$	○	×	×	×
b2	$k=1$	○	×	×	×
c1	$k=1$	○	×	×	○
c2	$k=1$	○	×	×	×
c3	$k=1$	○	○	×	○
c4	$k=1$	○	×	×	○
antisymmetric			mode n		
	wave number	2	4	6	8
a1	$k=1$	○	○	×	×
a2	$k=1$	△	○	×	×
b1	$k=1$	○	○	×	×
b2	$k=1$	○	○	×	×
c1	$k=1$	○	○	○	×
c2	$k=1$	○	○	○	×
c3	$k=1$	○	○	×	×
c4	$k=1$	○	○	×	×

を求める方程式となる。

3. 数値計算の方法

(16)式より$H^k_{n-2}=0$，$K^k_{n+2}=0$と仮定して，$L^k_n=0$を解いて，第1近似値R_1（$\equiv\dfrac{gh}{4\omega^2a^2}$）を求める。

$$R_1=\Lambda^k_n$$

つぎに，このR_1を用いて，必要な精度（ここでは3桁）を得るに必要なH^k_{n-2}とK^k_{n+2}の最大の項を決めておく。ここでは，H^k_{n-2}についてはH^k_kかH^k_{k+1}までとり，K^k_{n+2}についてはほとんどの場合，K^k_{n+22}項までとれば良いことがわかった。H^k_{n-2}，K^k_{n+2}を用いて，R_1に対する，誤差$E_1=L^k_n-H^k_{n-2}-K^k_{n+2}$を計算しておく。つぎに，第2近似値$R_2$とその誤差$E_2$を求めるのであるが，それについていろいろな場合に分けて，R_2以後の近似の求め方の違いによる解の収束性を調べた。調べた場合は，角振動数については，$0.19910\times10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}$（1年周期），$0.39820\times10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1}$（半年周期），$0.72720\times10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1}$（一日周期），$0.14544\times10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$（太陽半日周期），$0.21817\times10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$（太陽1/3日周期），$0.14052\times10^{-3}\,\mathrm{sec}^{-1}$（太陰半日周期）である。東西方向の波数については波数$k=1$〜10までについて，また南北方向の振動モードについてはモード$n=1$〜10までについて調べた。したがって，波数とモードの組合わせによって，赤道に対して，対称なモードと反対称なモードに分けられてくる。すなわち，$|k-n|$が偶数の時は対称モードであり，$|k-n|$が奇数の時は反対称モードである。

4. 計算した具体的な場合とその結果

(a)　数値計算は第2近似の計算の仕方によって分類して調べた。まず，第一に(a)，(b)，(c)のように大別され，(a)，(b)，(c)についてはさらに，具体的な場合について分けられる。

(a1)　まず第一に，この方法はzonalな場合の論文（古賀他，1991）の(a)の方法と本質的には全く同じである。R_1を用いて次の式をつぎつぎと計算する。

$$L^k_{n+2}=-R_1+\Lambda^k_{n+2}$$

$$L^k_{n-2}=-R_1+\Lambda^k_{n-2}。$$

そこで$K^k_{n+4}=0$と仮定して

$$K^k_{n+2}=\frac{x^k_n y^k_n}{L^k_{n+2}}。$$

また，$H^k_{n-4}=0$と仮定して

$$H^k_{n-2}=\frac{x^k_{n-2}y^k_{n-2}}{L^k_{n-2}}$$

を求める。これらを用いて

$$R_2\equiv\frac{hg}{4\omega^2a^2}=\Lambda^k_n-H^k_{n-2}-K^k_{n+2}。\tag{19}$$

Table Ⅳ. Results of convergence by the methods (b2) and (b1) with keeping the wave mode n constant and varying the wave number k.

angular freq.	0.72720 E-04	$n=7$	
symmetric	wave number	d2	d1
	1	×	×
	3	×	×
	5	○	×
	7	○	○
antisymmetric	2	×	×
	4	×	×
	6	×	×
angular freq.	0.14052 E-03	$n=8$	
	wave number	d2	d1
symmetric	2	×	×
	4	×($n=6$)	×
	6		○
	8		○
antisymmetric	1	×($n=4$)	×
	3	×($n=6$)	×
	5	○	×
	7	○	○
angular freq.	0.14544 E-03	$n=8$	
	wave number	d2	d1
symmetric	2	×($n=6$)	×
	4	○	×
	6	○	○
	8	○	○
antisymmetric	1	×($n=4$)	×
	3	×($n=6$)	×
	5	○	×
	7	○	○

これより，第2近似値 R_2 を求める。同様に，第3近似以後にても，近似回数を一回増すごとに K^k_{n+2}，H^k_{n-2} の continued fraction の項をそれぞれ1項づつ増して行って(19)の右辺で求める。この際勿論，H^k_j で $j<k$ の場合は $H^k_j=0$ ととる。また，K^k_j については $j\geqq n+22$ の場合も K^k_j は零とおいた。

その結果は表Ⅰのようであった。角振動数0.19910×10^{-6}sec^{-1}（1年周期）及び0.39820×10^{-6}sec^{-1}（半年周期）は収束しなかったので省いた。また，0.14052×10^{-3} sec^{-1}（太陰半日周期）の収束性は0.14544×10^{-3}sec^{-1}（太陽半日周期）と同じであったので省いてある。

(a2)　つぎに参考のため次の場合も調べた。第2，第3近似は同じである。また，近似を1回重ねるごとに K^k_{n+2}，H^k_{n-2} の continued fraction の項を1項づつ増すのもこれまで通りである。ただし，第4近似以後では i 番目の近似値 R_i は $(i-2)$ と $(i-1)$ の近似値 R_{i-2}，R_{i-1} とその誤差 E_{i-2}

$$E_{i-2}=L^k_n-H^k_{n-2}-K^k_{n+2} \tag{20}$$

および，E_{i-1} を用いて，次の式の内挿 (又は外挿) によって求める。

すなわち，

$$R_i=\frac{E_{i-2}R_{i-1}-E_{i-1}R_{i-2}}{E_{i-2}-E_{i-1}} \tag{21}$$

これらの計算結果が表Ⅱにまとめてある。

(b)　このグループの方法は H^k_{n-2} の項は初めから H^k_k 又は H^k_{k+1} まで，K^k_{n+2} では K^k_{n+2} 項まで計算で用いた。また，第2近似値 R_2 の求め方の違いによって，さらに2つに分けて調べてみた。

(b1)　この方法は第2近似値 R_2 を次の式にしたがって求めた。まず，R_1 よりその誤差 E_1 を(20)にしたがって求め，この E_1 を用いて

$$R_2=E_1+\Lambda^k_n$$

より求める。さらに第3近似以後の近似，例えば i 番目

Table V. Results of convergence by the methods (b2) (b1) with varying both the wave mode n and the wave number k.

angular freq.	0.14052 E-03	f2	f1
symmetric	$k=3,\ n=\ 3$	○	○
	$k=5,\ n=\ 5$	○	○
	$k=7,\ n=\ 7$	○	○
	$k=9,\ n=\ 9$	○	○
antisymmetric	$k=3,\ n=\ 4$	○	○
	$k=5,\ n=\ 6$	○	○
	$k=7,\ n=\ 8$	○	○
	$k=9,\ n=10$	○	○
angular freq.	0.14544 E-03	f2	f1
symmetric	$k=3,\ n=\ 3$	○	○
	$k=5,\ n=\ 5$	○	○
	$k=7,\ n=\ 7$	○	○
	$k=9,\ n=\ 9$	○	○
antisymmetric	$k=3,\ n=\ 4$	○	○
	$k=5,\ n=\ 6$	○	○
	$k=7,\ n=\ 8$	○	○
	$k=9,\ n=10$	○	○
angular freq.	0.72720 E-03	f2	f1
symmetric	$k=2,\ n=\ 2$	○	×
	$k=4,\ n=\ 4$	×	×
	$k=6,\ n=\ 6$	○	○
	$k=8,\ n=\ 8$	○	○
antisymmetric	$k=2,\ n=\ 3$	○	○
	$k=4,\ n=\ 5$	○	×
	$k=6,\ n=\ 7$	×	×
	$k=8,\ n=\ 9$	×	×
angular freq.	0.21817 E-03	f2	f1
symmetric	$k=4\ ,\ n=\ 4$	○	○
	$k=\ 6,\ n=\ 6$	○	○
	$k=\ 8,\ n=\ 8$	○	○
	$k=10,\ n=10$	○	○
antisymmetric	$k=\ 4,\ n=\ 5$	○	○
	$k=\ 6,\ n=\ 7$	○	○
	$k=\ 8,\ n=\ 9$	○	○
	$k=10,\ n=11$	○	○

の近似では(20)式より E_{i-1} を求める。また，R_i は

$$R_i=R_{i-1}+E_{i-1} \tag{22}$$

より求める。この方法は前の論文（松島他，1991）の方法（I）と同類である。

(b2) この方法は第2近似値 R_2 を求めるまでは，方法(b1)と全く同じである。第3番目の近似値 R_3 では R_2, R_1 および誤差 E_2, E_1 を用いて(21)式で計算した。また，この時，同様に誤差 E_i も(20)より計算しておく。以後，この方法を収束するまで繰り返す。つぎに，以下のグループについても計算してみた。

(c) この方法は，第2近似までは(a1)の方法と同じであるが，第3近似以後で用いる H^k_{n-2}, K^k_{n+2} の計算では(b)と同じく H^k_{n-2} では初めから H^k_k, 又は H^k_{k+1} を用い，K^k_{n+2} では K^k_{n+22} 項まで用いる。また，第3近似以後の求め方でいろいろ分けて調べた。

(c1) これらより R_2 を(16)式を用いて，また，このR_2 に対する誤差 E_2 も(20)式より計算する。第3近似以後は(21)式を用いて i 番目の近似値 R_i を求める。

(c2) この方法は第2近似値 R_2 までは(c1)と全く同じであるが，第3近似値 R_3 は以下のように求める。R_2 を用いて

$$L^k_{n+2}=-R_2+\Lambda^k_{n+2},$$

$$L^k_{n+4}=-R_2+\Lambda^k_{n+4},$$

$$L^k_{n-2}=-R_2+\Lambda^k_{nn-2},$$

$$L^k_{n-4}=-R_2+\Lambda^k_{nn-4},$$

を計算する。さらにK^k_{n+4}の計算では$K^k_{n+6}=0$と仮定して

$$K^k_{n+4}=\frac{x^k_{n+2}y^k_{n+2}}{L^k_{n+4}}。$$

さらに

$$K^k_{n+2}=\frac{x^k_n y^k_n}{L^k_{n+2}-K^k_{n+4}}.$$

また，H^k_{n-4}の計算では$H^k_{n-6}=0$と仮定して

$$H^k_{n-4}=\frac{x^k_{n-4}y^k_{n-4}}{L^k_{n-4}}.$$

また

$$H^k_{n-2}=\frac{x^k_{n-2}y^k_{n-2}}{L^k_{n-2}-H^k_{n-4}}$$

を計算してR_3を(19)式の右辺から求め，その誤差E_3も求めておく。以下i番目の近似値R_iは(21)式から求める。

(c3) 第3近似までは(c2)と全く同様で，それ以後の近似も本質的には全く同じである。すなわち，第4近似値R_4を求めるとき，L^k_{n+2}，L^k_{n+4}，L^k_{n+6}，L^k_{n-2}，L^k_{n-4}，L^k_{n-6}を計算する。さらにK^k_{n+6}の計算では$K^k_{n+8}=0$と仮定して式(17)から求め，以後順々とK^k_{n+4}，K_{n+2}を求める。H^k_{n-2}についても，まず$H^k_{n-8}=0$と仮定して(16)からH^k_{n-6}，H^k_{n-4}，H^k_{n-2}を求める。それ以後は(19)の右辺よりR_4を求め，またその誤差E_4は(20)から求める。第5近似以後は(21)，(20)を用いて収束するまで求める。

(c4) 第4近似根R_4を求めるまでは(c3)と同じであるが，さらにR_4を用いて，Λ^k_j，K^k_j，H^k_jを計算して，(22)式を用いて第5近似値R_5を求め，さらにその誤差E_5を計算する。第6近似以後は(21)式で近似値R_iを求める。

これらの結果を表Ⅲに表した。

以後の場合は東西方向の wave number kが零の場合に非常に良い結果をもたらした(b1)，(b2)の方法を用いて調べた。

(d) まず，mode nを一定にして，kの変化でどの様に収束性が変るかを調べた。

この結果を表Ⅳに表している。

(f) つぎに，kと共にnも共に増加した場合の収束性を調べた。この結果を表Ⅴに表している。

計算結果

全体として言えることは，角振動数が小さくなると収束は悪くなる。例えば，角振動数が$0.19910\times10^{-6}\mathrm{sec}^{-1}$の場合には，収束が余りにも遅く，考えているルジャンドル陪関数の項数を20項とっても収束しないことが解った。また角振動数$0.39820\times10^{-6}\mathrm{sec}^{-1}$では，ある$k$と$n$の場合には項数20項では収束しなかったり，他の$k$と$n$の場合では遅すぎたり，収束はするが得られた結果が他の場合のkとnの解が得られたりした。そこで良い結果は全ての方法で一つも得られなかった。一方，角振動数が大きくなり，例えば$0.21817\times10^{-3}\mathrm{sec}^{-1}$では，全ての方法で良い結果が得られ，収束も速かった。そこで，上の3つの角振動数の場合の結果は表から除いてある。

一般的に言えることは，前の論文の結果と同じく角振動数が大きくなると収束性は良い。また，東西方向の波数kと南北方向の mode nの差$|n-k|$が小さいほど収束性は良く，差が大きくなると別のkとnの値に収束したり(収束の安定性が悪い)，収束の速度が著しく悪くなったりすることが解った。なかんずく，特別に収束の良い方法は，この例の中には見当たらない。しかし，内挿(又は外挿)による方法は，比較的収束が速かった。

方法(a1)と(a2)を比較してみると，(a2)の方法がいくらか優れている。さらに，方法(b1)と(b2)では(b2)の方法がいくらか良さそうである。方法(a2)と方法(b2)では$k=1$で対称モードでは(a2)の方が良さそうであるが，特別良いとは言えない。方法(c1)，(c2)，(c3)，(c4)では，方法(c1)が一番良さそうである。また，調べた全ての方法の中でも方法(c1)が一番良さそうである。しかし，特別優れているとは言えない。

計算表Ⅳ，表Ⅴから言えることはnとkの差が小さいほど，収束性は良い。特に$(n-k)=0$又は1の場合は角振動数$0.72720\times10^{-4}\mathrm{sec}^{-1}$を除いて全ての場合で求まっている。

5. 結　論

この方法では，特に優れた方法はなかった。その中でも方法(c1)がいくぶん勝っているように見える。また，収束に関して一般的に言えることは，角振動数が大きくなれば収束は速く，収束の安定性も良い。また，東西方向の波数kと南北方向のモードnの差$(k-n)$が大きくなれば，収束は著しく悪くなり，収束の安定性も悪くなる。逆に$(k-n)=0$，または1の場合は，ほとんどの場

合解が求まる。

文　献

HOUGH, S. S.(1897): On the application of Harmonic analysis to the dynamical theory of tides, Part Ⅰ. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A189**, p.201.

HOUGH, S. S.(1898): On the application of Harmonic analysis to the dynamical theory of tides, Part Ⅱ. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A191**, p.139.

古賀雅夫・後藤信行・松島晟(1991): Laplace の Tidal equation −continued fraction による解の収束性について−. La mer, **29**, 62–66.

松島晟・古賀雅夫・後藤信行(1991): Laplace の Tidal equationの解—continued fraction 法による固有値の計算で収束しない原因とその改良法—. La mer, **29**, 90–96.