La mer 35: 95-105, 1997
Société franco-japonaise d'océanographie, Tokyo

Laplace の tidal equation の解（東西方向に zonal でない場合の解法：continued fraction による収束性）について II

松島　晟*・古賀雅夫*・福山　豊*・後藤信行**

On the solution of Laplace's tidal equation (The convergence of the solution by the continued fraction method in the non-zonal case towards the east) II

Akira MATSUSHIMA*, Masao KOGA*, Yutaka FUKUYAMA* and Nobuyuki GOTO**

Abstract: In the previous papers, some of the present authors studied on the atmospheric oscillation, using one of continued fraction-methods developed by HOUGH in order to solve Laplace's tidal equation.

In the present paper, the present authors study on the possibility of approximate solution of the tidal equation by several methods of (A1), (A2), (A3), (B), (C1), and (C2) and on the eigenvalues of it, that is, equivalent depths only if they can be obtained. Then the present authors get the same results as in one of the previous papers, that is ;

(i) the convergence of the solution becomes better as the angular frequency becomes larger.

(ii) as the difference between n and k, where n is the wave mode towards the south and k is the angular wave number towards the east, becomes larger the convergence of the solution becomes worse. On the other hand, when $(n-k)=0$ or 1 a good result can be obtained in almost any case.

1. 緒　言

以前の論文で大気の自由振動または強制振動の場合で HOUGH による continued fraction 法（HOUGH, 1897, 1898）による解の収束性について調べた。著者たちの前の論文(1)（古賀他, 1991), (2)（松島他, 1991）では, 東西方向に zonal な場合を，論文(3)（松島・古賀, 1992）では zonal でない場合を扱った。とくに，論文(3)では continued fraction による LHK 法を調べた。この方法は解の収束性はあまり良くなかった。その後うまくいかない場合について LHK 法の数学的な改良を試みたがうまくいかなかった。そこで，本論文でもやはり HOUGHの今一つの方法（MFf 方法と名付ける）の解の収束性について調べる。また MFf 法の解を確かめるため，対応する matrix を QR 法で解を求めた。

*長崎大学教育学部物理学教室，〒852 長崎市文教町 1-14
Department of Physics, Faculty of Education Nagasaki University, 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki City Nagasaki, 852 Japan.
**長崎大学教養部物理学教室，〒852 長崎市文教町 1-14
Department of Physics, Faculty of Liveral Arts Nagasaki University, 1-14 Bunkyo-machi, Nagasaki City Nagasaki, 852 Japan.

2. Continued fraction による解法の基礎（MFf 法）

前の論文(3)で次の式を説明した。この論文ではこの式に基づいて，MFf 法を説明する。すなわち，

$$\frac{4\omega^2a^2\zeta}{ghs^2}+\frac{d}{d\mu}\left[\frac{(1-\mu^2)\dfrac{d\zeta}{d\mu}-s\mu\zeta}{k^2-s^2\mu^2}\right]-\frac{k^2\zeta}{(1-\mu^2)(k^2-s^2\mu^2)}$$

$$+\frac{s\mu}{k^2-s^2\mu^2}\frac{d\zeta}{d\mu}=0 \tag{1}$$

ただし，

$$\mu=\cos\theta;\ s=\frac{2\omega k}{\beta}=\frac{k}{f} \tag{2}$$

また，

$$f=\frac{\beta}{2\omega} \tag{3}$$

である。記号については前の論文を参照されたい。

ここで，ϕ_1 と ϕ_2 を任意の関数として

$$\zeta = -\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}+s\mu\right\}\phi_1-(k^2-s^2\mu^2)\phi_2 \tag{4}$$

と仮定し，さらに，ϕ_1 と ϕ_2 の間に

$$(\nabla^2+s)\phi_1 = 2s^2\mu\phi_2 \tag{5}$$

が成り立つと仮定する。ここで，

$$\nabla^2 = \frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right\}-\frac{k^2}{1-\mu^2} \tag{6}$$

である。これらを用いると，(1)は

$$\frac{4\omega^2a^2}{ghs^2}\zeta+(\nabla^2-s^2)\phi_2 = 0 \tag{7}$$

(4)，(5)，(7)に次の展開式(8)，(9)，(10)を代入する。

$$\zeta = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k P_n^k \tag{8}$$

$$\phi_1 = \sum_{n=k}^{\infty} D_n^k P_n^k \tag{9}$$

$$\phi_2 = \sum_{n=k}^{\infty} G_n^k P_n^k \tag{10}$$

ここで P_n^k はルジャンドルの陪関数である。その結果，次の式が得られる。

$$\frac{4\omega^2a^2}{ghs^2}C_n^k = -[n(n+1)+s]G_n^k \tag{11}$$

$$-[n(n+1)-s]D_n^k = 2s^2\left[G_{n-1}^k\frac{n-1}{2n-1}+G_{n+1}^k\frac{n+k+1}{2n+3}\right] \tag{12}$$

$$C_n^k = -k^2G_n^k-\frac{1}{2}\left\{D_{n-1}^k\frac{[(n-1)(n-2)+s](n-k)}{2n-1}\right. \\ \left.+D_{n+1}^k\frac{[(n+2)(n+3)+s](n+k+1)}{2n+3}\right\} \tag{13}$$

ここで，次式で新しい記号 N_n^k と U_n^k を定義する。

$$N_n^k = n(n+1)-s \tag{14}$$

$$N_n^kU_n^k = \frac{(n+1)^2(n-k)}{2n-1}C_{n-1}^k+\frac{n^2(n+k+1)}{2n+3}C_{n+1}^k \tag{15}$$

そこで，(11)，(12)，(13)と(14)，(15)から次の式が得られる。

$$\frac{(n+1)^2(n-k)}{2n-1}U_{n-1}^k+\frac{n^2(n+k+1)}{2n+3}U_{n+1}^k = M_n^kC_n^k \tag{16}$$

ここで，

$$M_n^k = \frac{k^2}{s^2}[n(n+1)-s]-\frac{gh}{4\omega^2a^2}n^2(n+1) \tag{17}$$

さらに，(15)を用いれば，(16)より

$$M_n^k-\left[\frac{A_{n-1}^k}{N_{n-1}^k-}\frac{A_{n-2}^k}{M_{n-2}^k-}\cdots\right]-\left[\frac{A_n^k}{N_{n+1}^k-}\frac{A_{n+2}^k}{M_{n+2}^k-}\cdots\right] = 0 \tag{18}$$

が得られる。ここで A_n^k は，

$$A_n^k = \frac{(n+2)^2n^2(n-k+1)(n+k+1)}{(2n+1)(2n+3)} \tag{19}$$

また，同様に(16)を用いれば(15)より

$$N_n^k-\left[\frac{A_{n-1}^k}{M_{n-1}^k-}\frac{A_{n-2}^k}{N_{n-2}^k-}\cdots\right]-\left[\frac{A_n^k}{M_{n+1}^k-}\frac{A_{n+1}^k}{N_{n+2}^k-}\cdots\right] = 0 \tag{20}$$

が得られる。ここで，さらに次の4個の continued fraction の記号を用いる。

$$e_n^k = \frac{A_{n-1}^k}{M_n^k-}\frac{A_n^k}{N_{n+1}^k-}\frac{A_{n+1}^k}{M_{n+2}^k-}\cdots \tag{21}$$

$$F_n^k = \frac{A_n^k}{M_n^k}\frac{A_{n-1}^k}{M_{n-1}^k-}\frac{A_{n-2}^k}{N_{n-2}^k-}\cdots \tag{22}$$

$$f_n^k = \frac{A_{n-1}^k}{N_n^k-}\frac{A_n^k}{M_{n+1}^k-}\frac{A_{n+1}^k}{N_{n+2}^k-}\cdots \tag{23}$$

$$E_n^k = \frac{A_n^k}{M_n^k-}\frac{A_{n-1}^k}{N_{n-1}^k-}\frac{A_{n-2}^k}{M_{n-2}^k-}\cdots \tag{24}$$

これらを用いると(21)，(22)，(23)，(24)は次のようになる。

$$e_n^k = \frac{A_{n-1}^k}{M_n^k-f_{n+1}^k} \tag{25}$$

$$F_n^k = \frac{A_n^k}{N_n^k-E_{n-1}^k} \tag{26}$$

$$f_n^k = \frac{A_{n-1}^k}{N_n^k-e_{n+1}^k} \tag{27}$$

$$E_n^k = \frac{A_n^k}{M_n^k-F_{n-1}^k} \tag{28}$$

また(18)，(20)は次のようになる。

$$M_n^k-F_{n-1}^k-f_{n+1}^k = 0 \tag{29}$$

$$N_n^k-E_{n-1}^k-e_{n+1}^k = 0 \tag{30}$$

次の章で(29)，(30)を用いて，数値計算をして解を求める。

3. 実際の数値計算方法

全体として根の近似計算では $M_n^k=0$ よりまず根を求め，この根を用いて f_{n+1}^k，F_{n-1}^k 等を計算する。さらに次の近似根を求めるとき，f_{n+1}^k を用いるならば $f_{n+1}^k = a_n^k/N_n^k$ 近似とする。ただし(B)，(C)の方法の場合を除く。また F_{n-1}^k を用いる場合にはさらに $F_{n-1}^k = a_n^k/N_n^k$ と近似する。しかし，残差を計算するときはこのような近似を用いないで continued fraction が収束するまでの全ての項を用いる。

3.1 (A1)の方法

段階(1) まず $M_n^k=0$ より根 $R1$ を求める。この $R1$ を新たに M_n^k，f_{n+1}^k，F_{n-1}^k を計算する。これら M_n^k，f_{n+1}^k，F_{n-1}^k，等を用いて，さらに残差 $E1$ を次の式 $E1 = M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k$ から求める

段階(2) 次に $M_n^k-f_{n+1}^k=0$ より，新たに根 $R2$ を求めて，同じようにして残差 $E2$ を計算する。

段階(3) さらに，新しい $R2$ を次の線形近似式からもとめる。

$$R2=\frac{E1\cdot R2-E2\cdot R1}{E1-E2} \tag{31}$$

次に同様にして，また新しい $E2$ を求める。以後は段階(3)を収束するまで繰り返す。

3.2 (A2)の方法

この方法も本質的には(A1)の方法と同じである。根 $R1$ と根 $R2$ の求め方が少し異なる。

段階(1) $M_n^k-f_{n+1}^k=0$ より根 $R1$ を求め，さらにこの $R1$ を用いて，M_n^k, f_{n+1}^k, F_{n-1}^k を計算し直して，$E1=M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k$ より残差 $E1$ を計算する。

段階(2) $M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k=0$ の新しい根 $R2$ を求め，さらに上と同じようにして，$E2=M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k$ より新しい残差 $E2$ を計算する。

段階(3) 上の $R1$, $E1$ と $R2$, $E2$ より式(31)を用いて新たに $R2$ を求め，この $R2$ よりまた新しい $E2$ を計算する。以後は段階(3)の繰り返しである。ただし，この方法は $n=k$ の場合には $F_{n-1}^k=0$ となるから，$M_n^k-f_{n+1}^k=0$ の根と同じになる。

3.3 (A3)の方法

この方法は(A1)，(A2)の方法と殆ど同じである。ここでは簡単に説明する。$M_n^k=0$ より根 $R1$ を求め，さらに，(A1)，(A2)と同様にして残差 $E1$ を計算する。次に $M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k=0$ より根 $R2$ を求め，さらに $E2$ を計算する。以後，新しい $R2$, $E2$ は(A1)，(A2)と同じようにして求める。ここで，$n=k$ の場合には(A1)と同じ結果となる。

3.4 (B)の方法

(A1)と(A2)の結果からとくに continued fraction の収束性に注意して，この収束性を2通りで確かめる。この方法は(A1)と(A2)を結びつけたような方法である。また新たに，根の近似式で f_{n-1}^k を別の近似を用いてみる。

まず初めに $M_n^k=0$ より根 $RR0$ をもとめる。この $RR0$ より continued fraction e_n^k, f_n^k の収束性を調べ，収束するならば次の段階(1)に移る。さらに収束しないときは $M_n^k-f_{n+1}^k=0$ の根 $RR1$ を求め，また同じように $RR1$ での級数の収束性を調べる。さらに，収束しない場合には，この方法での計算は打ち切る。収束する場合は次の段階(1)に移る。

段階(1) さて，根 $RR0$ または，$RR1$ を用いて，M_n^k, f_{n+1}^k, F_{n-1}^k を計算し，そこで，$M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k=0$ より $R1$ を求め，この $R1$ より新たに M_n^k, f_{n+1}^k, F_{n-1}^k，を計算して，$E1=M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k$ より，さらに，残差 $E1$ を求める。ただし，$n=k$ の場合には $F_{n-1}^k=0$ となる。

段階(2) さらに $M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k=0$ より新たに根 $R2$ を求める。ただし，ここでは項 f_{n-1}^k を計算するときには f_{n+1}^k に項 e_{n+2}^k まで含ませてある。さらに，この $R2$ を用いて新たに M_n^k, f_{n+1}^k, F_{n-1}^k，を計算して，$E2=M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k$ より残差 $E2$ を求める。

段階(3) 最後に，段階(1)と段階(2)の $R1$, $E1$ および $R2$, $E2$ を用いて，式(31)から新しい $E2$ を計算する。以後は段階(3)を収束する迄繰り返す。

3.5 (C1)の方法

ここでは，今までとは少し異なる近似を用いてみる。すなわち，

段階(1) $M_n^k-f_{n+1}^k=0$ の根を $R1$ として，残差 $E1$ を

$$E1=M_n^{k\prime}-f_{n+1}^{k\prime}-F_{n-1}^{k\prime}$$

とする。ここで，ダッシュは $R1$ を用いて計算した量を示す。

段階(2) 次に新しい根 $R2$ は，残差が零になるように選ぶ。すなわち，

$$M_n^k-f_{n+1}^k-F_{n-1}^k=0$$

ここで，$f_{n+1}^k=f_{n+1}^{k\prime}$, $F_{n-1}^k=F_{n-1}^{k\prime}$ と近似すれば

$$M_n^k=M_n^k-E1$$

となり，上の式から根 $R2$ を求める。

段階(3) 段階(1)と段階(2)を収束する迄繰り返す。

3.6 (C2)の方法

この方法は(C1)の方法と殆どおなじである。(C1)との違いは段階(3)で式(31)を用いる。

4. 数値計算とその結果

この論文でも，前の論文と同じように（角）振動数 β を与えて，固有値として equivalent depth h を求めた。このさい，解が収束するために二つの条件がある。一つは continued fraction の収束であり，いま一つは解の近似を高めるための繰り返し計算の収束である。continued fraction の収束する項の数は $m/2$ で表され，実

Table 1. The convergences of the solution of the tidal equation and the equivalent depths obtained by the approximation methods of (A1), (A2), (A3), (B), (C1), and (C2) in a symmetric oscillation of the atmosphere with regards to the equator, and some of the equivalent depths obtained by the QR matrix-method in the same oscillation.

β=0.19910E-06	k = 1				SYMMETRIC		
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 1	20 / / 3		20 / / 4	20 / / 12	*	*	1.280E+02
h	2.570E+03		2.570E+03	4.400E+03	*	*	7.470E+02
n = 3	*	42 / / 6	*	* /42/ 24	42 / / 34	42 / / 5	1.880E+03
h	*	5.230E+03	*	7.930E+02	*	9.190E+03	1.620E+04
n = 5	*	42 / / 7	*	* /42/ 7	42 / / 34	42 / / 7	3.450E+03
h	*	5.230E+03	*	5.230E+03	*	1.480E+02	
β=0.39820E-06	k = 1						
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 1	20 / / 5		20 / / 6	20 / / 6	38 / / 34	38 / / 6	1.830E+05
h	6.870E+02		6.870E+02	6.870E+02	*	5.910E+02	-4.480E+03
n = 3	*	34 / / 3	*	* /34/ 17	34 / / 34	34 / / 8	5.290E+02
h	*	1.260E+04	*	1.830E+04	*	1.260E+04	3.030E+03
n = 5	*	32 / / 5	*	* /32/ 7	32 / / 34	32 / / 6	7.280E+03
h	*	1.830E+04	*	1.830E+04	*	7.350E+03	
β=0.72720E-04	k = 1						
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 1	*		*	* /20/ 4	20 / / 6	20 / / 3	-1.220E+06
h	*		*	-1.220E+06	-1.220E+06	-1.220E+06	-1.750E+05
n = 3	20 / / 8	26 / / 9	20 / / 11	20 / / 7	26 / / 34	26 / / 6	6.900E+04
h	-1.750E+05	-1.750E+05	6.900E+04	6.900E+04	*	-1.750E+05	-6.440E+04
n = 5	20 / / 3	*	20 / / 5	20 / / 6	*	*	-3.290E+04
h	6.900E+04	*	6.900E+04	-1.750E+05	*	*	
n = 7	20 / / 11	*	20 / / 7	20 / / 21	*	*	
h	-1.990E+04	*	-9.400E+03	-9.400E+03	*	*	
β=0.14544E-03	k = 2						
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 2	20 / / 2		20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 2	7.840E+05
h	7.840E+05		7.840E+05	7.840E+05	7.840E+05	7.840E+05	2.100E+05
n = 4	20 / / 4	20 / / 3	20 / / 4	20 / / 4	20 / /16	20 / / 4	9.550E+04
h	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	5.420E+04
n = 6	20 / / 7	20 / / 3	20 / / 5	20 / / 6	20 / / 34	20 / / 11	3.480E+04
h	2.100E+05	9.550E+04	9.550E+04	9.550E+04	*	2.420E+04	2.430E+04
n = 8	20 / / 3	20 / / 5	20 / / 7	20 / / 19	20 / / 34	20 / / 4	
h	9.550E+04	9.550E+04	9.550E+04	9.550E+04	*	9.550E+04	
β=0.14052E-03	k = 2						
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 2	20 / / 2		20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 2	7.060E+05
h	7.060E+05		7.060E+05	7.060E+05	7.060E+05	7.060E+05	1.840E+05
n = 4	20 / / 4	20 / / 3	20 / / 4	20 / / 3	20 / / 34	20 / / 5	8.240E+04
h	1.840E+05	1.840E+05	1.840E+05	1.840E+05	*	1.840E+05	4.620E+04
n = 6	20 / / 1	20 / / 4	20 / / 6	20 / / 5	20 / / 34	20 / / 7	2.950E+04
h	1.840E+05	8.240E+04	1.840E+05	1.840E+05	*	2.950E+04	
n = 8	20 / / 2	20 / / 4	20 / / 6	20 / / 14	20 / / 34	20 / / 3	
h	8.240E+04	8.240E+04	8.240E+04	8.240E+04	*	8.240E+04	
β=0.21817E-03	k = 3						
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 1		20 / / 2	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 1	1.280E+06
h	1.280E+06		1.280E+06	1.280E+06	1.280E+06	1.280E+06	5.080E+05
n = 5	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 3	20 / / 2	2.710E+05
h	5.080E+05	5.080E+05	5.080E+05	5.080E+05	5.080E+05	5.080E+05	1.680E+05
n = 7	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 4	20 / / 3	
h	2.710E+05	2.710E+05	2.710E+05	2.710E+05	2.710E+05	2.710E+05	
n = 9	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 2	20 / / 1	20 / / 5	20 / / 3	
h	1.680E+05	1.680E+05	1.680E+05	1.680E+05	1.680E+05	1.680E+05	

β is an angular frequency, k is an angular wave number towards the east, n is a wave mode towards the south, L is the number of itteration in the approximate calculation and $m/2$(or $m'/2$) is the number of terms of a continued fraction necessary to obtain somewhat exact value of the continued fraction.

Table 2. The convergence and the equivalent depths obtained by the methods of (A1) and (A2), in an antisymmetric oscillation of the atmosphere with regards to the equator, as in the Table 1.

β = 0.19910E-06		k = 1			ANTISYMMETRIC		
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 2	*	44 / / 6	*	* /44/ 31	44 / / 34	44 / / 12	3.620E+02
h	*	4.300E+03	*	2.620E+03	*	2.620E+03	1.210E+03
n = 4	*	42 / / 11	*	* /42/ 29	42 / / 34	42 / / 6	2.530E+03
h	*	4.300E+03	*	1.180E+04	*	2.620E+03	1.780E+04
n = 6	*	40 / / 5	*	* /40/ 13	40 / / 34	40 / / 6	4.220E+03
h	*	6.210E+03	*	6.210E+03	*	4.300E+03	
β = 0.39820E-06		k = 1					
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 2	*	34 / / 2	*	* /34/ 7	34 / / 34	34 / / 3	-3.190E+05
h	*	9.930E+03	*	1.550E+04	*	9.930E+03	7.500E+04
n = 4	*	34 / / 7	*	* /34/ 20	34 / /34	34 / / 10	3.710E+04
h	*	1.550E+04	*	2.100E+04	*	1.620E+03	2.650E+04
n = 6	*	30 / / 5	*	* /30/ 9	30 / / 34	30 / / 4	2.100E+04
h	*	9.930E+03	*	9.930E+03	*	9.930E+03	
β = 0.72720E-04		k = 1					
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 2	20 / / 4	20 / / 1	20 / / 1	20 / / 1	20 / / 2	20 / / 2	7.950E+07
h	7.950E+07	7.950E+07	7.950E+07	7.950E+07	7.950E+07	7.950E+07	-1.810E+05
n = 4	20 / / 7	36 / / 6	20 / /6	20 / / 4	36 / / 11	36 / / 4	-6.450E+04
h	-1.810E+05	-1.810E+05	-1.810E+05	-1.810E+05	-1.810E+05	-1.810E+05	2.380E+04
n = 6	20 / / 5	*	20 / /18	20 / / 5	*	*	-3.290E+04
h	2.380E+04	*	2.380E+04	-5.410E+03	*	*	
n = 8	20 / / 6	*	20 / / 8	20 / / 12	*	*	
h	2.380E+04	*	-6.450E+04	7.230E+03	*	*	
β = 0.14544E-03		k = 2					
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 5	20 / / 3	3.660E+05
h	3.660E+05	3.660E+05	3.660E+05	3.660E+05	3.660E+05	3.660E+05	1.360E+05
n = 5	20 / / 6	20 / / 4	20 / / 3	20 / / 4	20 / /34	20 / / 8	7.050E+04
h	1.360E+05	1.360E+05	1.360E+05	1.360E+05	*	7.050E+04	4.290E+04
n = 7	20 / / 5	20 / / 7	20 / / 9	20 / / 14	20 / / 34	20 / / 6	2.880E+04
h	1.360E+05	7.050E+04	1.360E+05	2.880E+04	*	1.360E+05	2.060E+04
n = 9	20 / / 3	20 / / 4	20 / / 6	20 / / 8	20 / / 34	20 / / 3	
h	7.050E+04	7.050E+04	7.050E+04	7.050E+04	*	7.050E+04	
β = 0.14052E-03		k = 2					
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 6	20 / / 3	3.240E+05
h	3.240E+05	3.240E+05	3.240E+05	3.240E+05	3.240E+05	3.240E+05	1.180E+05
n = 5	20 / / 6	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 4	20 / / 34	20 / / 10	6.050E+04
h	1.180E+05	1.180E+05	1.180E+05	1.180E+05	*	1.730E+04	3.650E+04
n = 7	20 / / 5	20 / / 8	20 / / 7	20 / / 16	20 / / 34	20 / / 5	2.430E+04
h	1.180E+05	1.180E+05	1.180E+05	1.730E+03	*	1.180E+05	
n = 9	20 / / 4	20 / / 5	20 / / 6	20 / / 21	20 / / 34	20 / / 4	
h	6.050E+04	6.050E+04	6.050E+04	6.050E+04	*	6.050E+04	
β = 0.21817E-03		k = 3					
	A1	A2	A3	B	C1	C2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	
n = 4	20 / / 3	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	7.650E+05
h	7.650E+05	7.650E+05	7.650E+05	7.650E+05	7.650E+05	7.650E+05	3.620E+05
n = 6	20 / / 3	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 3	20 / / 2	2.100E+05
h	3.620E+05	3.620E+05	3.620E+05	3.620E+05	3.620E+05	3.620E+05	1.370E+05
n = 8	20 / / 3	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 4	20 / / 3	9.710E+04
h	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	2.100E+05	
n = 10	20 / / 4	20 / / 2	20 / / 3	20 / / 2	20 / / 7	20 / / 3	
h	1.370E+05	1.370E+05	1.370E+05	1.370E+05	1.370E+05	1.370E+05	

Table 3. The convergence and the equivalent depths with other k in a symmetric or an antisymmetric oscillation of the atmosphere with regards to the equator.

β = 0.72720E-04							
k = 3	SYMMETRIC			k = 2	ANTISYMMETRIC		
	A1	A2	h (QR)		A1	A2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 9		-1.470E+05	n = 3	20 / / 8	24 / / 5	-3.670E+05
h	5.520E+04		5.520E+04	h	-9.640E+04	-3.670E+05	-9.640E+04
	m / m' / L	m / m' / L	-5.940E+04		m / m' / L	m / m' / L	-4.380E+04
n = 5	20 / / 5	*	-3.150E+04	n = 5	20 / / 6	42 / / 8	2.330E+04
h	5.520E+04	*	-1.940E+04	h	-6.730E+03	-9.640E+04	-2.490E+04
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 7	20 / / 24	*		n = 7	20 / / 4	*	
h	-1.470E+05	*		h	2.330E+04	*	
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 9	20 / / 11	*		n = 9	20 / / 5	*	
h	1.310E+03	*		h	2.330E+04	*	
β = 0.14544E-03							
k = 3	SYMMETRIC			k = 2	ANTISYMMETRIC		
	A1	A2	h (QR)		A1	A2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 3		4.720E+05	n = 3	20 / / 4	20 / / 4	3.360E+05
h	4.720E+05		1.610E+05	h	3.360E+05	3.360E+05	1.360E+05
	m / m' / L	m / m' / L	7.980E+04		m / m' / L	m / m' / L	7.050E+04
n = 5	20 / / 4	20 / / 4	4.730E+04	n = 5	20 / / 6	20 / / 4	4.290E+04
h	1.610E+05	1.610E+05	3.130E+04	h	1.360E+05	1.360E+05	2.880E+04
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 7	20 / / 8	20 / / 3		n = 7	20 / / 5	20 / / 7	
h	7.980E+04	7.980E+04		h	1.360E+05	7.050E+04	
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 9	20 / / 5	20 / / 11		n = 9	20 / / 3	20 / / 4	
h	7.980E+04	7.980E+04		h	7.050E+04	7.050E+04	
β = 0.14052E-03							
k = 3	SYMMETRIC			k = 2	ANTISYMMETRIC		
	A1	A2	h (QR)		A1	A2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 3	20 / / 3		4.300E+05	n = 3	20 / / 4	20 / / 4	3.240E+05
h	4.300E+05		1.430E+05	h	3.240E+05	3.240E+05	1.180E+05
	m / m' / L	m / m' / L	7.020E+04		m / m' / L	m / m' / L	6.050E+04
n = 5	20 / / 4	20 / / 4	4.120E+04	n = 5	20 / / 6	20 / / 3	3.650E+04
h	1.430E+05	1.430E+05	2.710E+04	h	1.180E+05	1.180E+05	2.430E+04
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 7	20 / / 8	20 / / 3		n = 7	20 / / 5	20 / / 8	
h	1.430E+05	7.020E+04		h	1.180E+05	1.180E+05	
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 9	20 / / 4	20 / / 6		n = 9	20 / / 4	20 / / 5	
h	7.020E+04	7.020E+04		h	6.050E+04	6.050E+04	
β = 0.21817E-03							
k = 4	SYMMETRIC			k = 3	ANTISYMMETRIC		
	A1	A2	h (QR)		A1	A2	h (QR)
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 4	20 / / 2		8.140E+05	n = 4	20 / / 3	20 / / 2	7.650E+05
h	8.140E+05		3.730E+05	h	7.650E+05	7.650E+05	3.620E+05
	m / m' / L	m / m' / L	2.140E+05		m / m' / L	m / m' / L	2.100E+05
n = 6	20 / / 3	20 / / 2	1.390E+05	n = 6	20 / / 3	20 / / 2	1.370E+05
h	3.730E+05	3.730E+05	9.800E+04	h	3.620E+05	3.620E+05	9.710E+04
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 8	20 / / 3	20 / / 2		n = 8	20 / / 3	20 / / 2	
h	2.140E+05	2.140E+05		h	2.100E+05	2.100E+05	
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
n = 10	20 / / 3	20 / / 2		n = 10	20 / / 4	20 / / 2	
h	1.390E+05	1.390E+05		h	1.370E+05	1.370E+05	

Table 4. The convergence and the equivalent depths vaying k with keeping n constant.

β = 0.72720E-04							
n = 7	SYMMETRIC		h (QR)	n = 7	ANTISYMMETRIC		h (QR)
	A1	A2	A1 / A2		A1	A2	A1 / A2
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 1	20 / / 12	*		k = 2	20 / / 4	*	
h	-1.990E+04	*	? / *	h	2.330E+04	*	? / *
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 3	20 / / 24	*		k = 4	20 / / 5	*	
h	-1.470E+05	*	? / *	h	1.980E+04	*	? / *
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 5	20 / / 12	34 / / 13		k = 6	20 / / 9	26 / / 6	
h	-5.160E+04	-1.830E+04	? / ?	h	1.540E+04	-4.200E+03	? / *
	m / m' / L	m / m' / L					
k = 7	20 / / 4						
h	2.360E+04		o /				
β = 0.14544E-03							
n = 8	SYMMETRIC		h (QR)	n = 8	ANTISYMMETRIC		h (QR)
	A1	A2	A1 / A2		A1	A2	A1 / A2
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 2	20 / / 4	20 / / 6		k = 1	20 / / 4	20 / / 5	
h	9.550E+04	9.550E+04	? / ?	h	8.270E+04	8.270E+04	? / ?
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 4	20 / / 6	20 / / 4		k = 3	20 / / 6	20 / / 4	
h	6.730E+04	6.730E+04	o / o	h	1.100E+05	6.040E+04	o / ?
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 6	20 / / 4	20 / / 3		k = 5	20 / / 4	20 / / 4	
h	8.320E+04	8.320E+04	o / o	h	7.490E+04	7.490E+04	o / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 8	20 / / 2			k = 7	20 / / 3	20 / / 3	
h	1.020E+05		o /	h	9.230E+04	9.230E+04	o / o
β = 0.14052E-03							
n = 8	SYMMETRIC		h (QR)	n = 8	ANTISYMMETRIC		h (QR)
	A1	A2	A1 / A2		A1	A2	A1 / A2
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 2	20 / / 3	20 / / 5		k = 1	20 / / 5	20 / / 6	
h	8.240E+04	8.240E+04	? / ?	h	6.770E+04	6.770E+04	? / ?
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 4	20 / / 9	20 / / 4		k = 3	20 / / 5	20 / / 5	
h	5.990E+04	5.990E+04	o / o	h	9.440E+04	5.290E+04	? / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 6	20 / / 4	20 / / 4		k = 5	20 / / 5	20 / / 4	
h	7.570E+04	7.570E+04	o / o	h	6.750E+04	6.750E+04	o / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 8	20 / / 2			k = 7	20 / / 3	20 / / 3	
h	9.470E+04		o /	h	8.480E+04	8.480E+04	o / o
β = 0.21817E-03							
n = 9	SYMMETRIC		h (QR)	n = 9	ANTISYMMETRIC		h (QR)
	A1	A2	A1 / A2		A1	A2	A1 / A2
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 3	20 / / 3	20 / / 2		k = 2	20 / / 4	20 / / 3	
h	1.680E+05	1.680E+05	o / o	h	1.670E+05	1.670E+05	o / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 5	20 / / 3	20 / / 2		k = 4	20 / / 3	20 / / 2	
h	1.750E+05	1.750E+05	o / o	h	1.710E+05	1.710E+05	o / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 7	20 / / 3	20 / / 2		k = 6	20 / / 3	20 / / 2	
h	1.850E+05	1.850E+05	o / o	h	1.790E+05	1.790E+05	o / o
	m / m' / L	m / m' / L			m / m' / L	m / m' / L	
k = 9	20 / / 2			k = 8	20 / / 2	20 / / 2	
h	1.990E+05		o /	h	1.920E+05	1.920E+05	o / o

o,*, and ? indicate successful, unsuccessful, and questionable cases, respectively.

Table 5. The convergence and the equivalent depths varying k with keeping n equal to k.

SYMMETRIC					
β = 0.19910E-06		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	4.090E+01
k = 2	n = 2	22 / / 7		22 / / 7	2.730E+02
h		9.160E+02		9.160E+02	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.460E+01
k = 4	n = 4	30 / / 8		30/ / 8	1.080E+02
h		1.060E+02		1.060E+02	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	8.04E+00
k = 6	n = 6	38 / / 10		38 / / 10	6.220E+01
h		-1.220E+00		-1.220E+00	
β =0.39820E-06		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.270E+02
k = 2	n = 2	24 / / 8		24 / / 8	7.330E+02
h		9.270E+02		9.270E+02	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	3.840E+01
k = 4	n = 4	32 / / 4		32 / / 4	2.490E+02
h		5.640E+02		5.640E+02	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.000E+01
k = 6	n = 6	42 / / 7		42 / / 7	1.380E+02
h		1.030E+02		1.030E+02	
β = 0.72720E-04		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-3.380E+05
k = 2	n = 2	20 / / 6		20 / / 6	-9.580E+04
h		6.530E+04		6.530E+04	6.530E+04
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-8.150E+05
k = 4	n = 4	20 / / 9		20 / / 9	4.460E+04
h		4.460E+04		4.460E+04	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.890E+04
k = 6	n = 6	20 / / 4		20 / / 4	-3.560E+04
h		2.890E+04		1.760E+02	-2.180E+04
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.960E+04
k = 8	k = 8	20 / / 4		20 / / 4	-1.980E+04
h		1.960E+04		1.960E+04	
β = 0.14544E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	4.720E+05
k = 3	n = 3	20 / / 3		20 / / 3	1.610E+05
h		4.720E+05		4.720E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.220E+05
k = 5	n = 5	20 / / 2		20 / / 2	1.010E+05
h		2.220E+05		2.220E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.280E+05
k = 7	n = 7	20 / / 2		20 / / 2	6.940E+04
h		1.280E+05		1.280E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	8.330E+04
k = 9	n = 9	20 / / 2		20 / / 2	5.020E+04
h		8.330E+04		8.330E+04	
β = 0.14052E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	4.300E+05
k = 3	n = 3	20 / / 3		20 / / 3	1.430E+05
h		4.300E+05		4.300E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.040E+05
k = 5	n = 5	20 / / 2		20 / / 2	9.200E+04
h		2.040E+05		2.040E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.180E+05
k = 7	n = 7	20 / / 2		20 / / 2	6.330E+04
h		1.180E+05		1.180E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	7.720E+04
k = 9	n = 9	20 / / 2		20 / / 2	4.610E+04
h		7.720E+04		7.720E+04	
β = 0.21817E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	8.140E+05
k = 4	n = 4	20 / / 2		20 / / 2	3.740E+05
h		8.140E+05		8.140E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	4.100E+05
k = 6	n = 6	20 / / 2		20 / / 2	2.280E+05
h		4.100E+05		4.100E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.470E+05
k = 8	n = 8	20 / / 2		20 / / 2	1.540E+05
h		2.470E+05		2.470E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.640E+05
k = 10	n = 10	20 / / 2		20 / / 2	1.110E+05
h		1.640E+05		1.640E+05	

Table 6. The convergence and the equivalent depths varying k with keeping n equal to $k+1$.

ANTISYMMETRIC					
β = 0.19910E-06		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.230E+02
k = 2	n = 3	38 / / 10	*	38 / /13	4.410E+02
h		1.700E+03	*	1.150E+03	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	4.700E+01
k = 4	n = 5	42 / / 5	*	42 / / 4	1.760E+02
h		5.140E+02	*	7.070E+02	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.680E+01
k = 6	n = 7	*	*	*	1.020E+02
h		*	*	*	
β =0.39820E-06		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	3.600E+02
k = 2	n = 3	*	*	*	1.200E+03
h		*	*	*	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.130E+02
k = 4	n = 5	*	*	*	4.050E+02
h		*	*	*	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	6.160E+01
k = 6	n = 7	*	*	*	2.260E+02
h		*	*	*	
β = 0.72720E-04		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-3.670E+05
k = 2	n = 3	20 / / 8	24 / / 5	20 / / 4	-9.640E+04
h		-9.640E+04	-3.670E+05	-3.670E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-8.160E+04
k = 4	n = 5	20 / / 8	38 / / 5	20 / / 6	-4.020E+04
h		-1.540E+04	-4.020E+04	-4.020E+04	1.980E+04
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-3.560E+04
k = 6	n = 7	20 / / 9	26 / / 6	20 / / 3	-2.190E+04
h		1.540E+04	-4.200E+03	-4.110E+03	1.550E+04
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	-1.980E+04
k = 8	n = 9	20 / / 6	24 / / 9	20 / / 15	1.200E+04
h		1.190E+04	2.960E+03	5.400E+03	-1.370E+04
					5.410E+03
β = 0.14544E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.570E+05
k = 3	n = 4	20 / / 4	20 / / 3	20 / / 4	1.100E+05
h		2.570E+05	2.570E+05	2.570E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.440E+05
k = 5	n = 6	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	7.490E+04
h		1.440E+05	1.440E+05	1.440E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	9.230E+04
k = 7	n = 8	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	5.390E+04
h		9.230E+04	9.230E+04	9.230E+04	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	6.370E+04
k = 9	n = 10	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	4.050E+04
h		6.370E+04	6.370E+04	6.370E+04	
β = 0.14052E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.310E+05
k = 3	n = 4	20 / / 4	20 / / 4	20 / / 4	9.740E+04
h		2.310E+05	2.310E+05	2.310E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.320E+05
k = 5	n = 6	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	6.750E+04
h		1.320E+05	1.320E+05	1.320E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	8.480E+04
k = 7	n = 8	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	4.900E+04
h		8.480E+04	8.480E+04	8.480E+04	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	5.870E+04
k = 9	n = 10	20 / / 3	20 / / 3	20 / / 3	3.700E+04
h		5.870E+04	5.870E+04	5.870E+04	
β = 0.21817E-03		A1	A2	A3	h (QR)
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	5.300E+05
k = 4	n = 5	20 / / 3	20 / / 2	20 / / 2	2.780E+05
h		5.300E+05	5.300E+05	5.300E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	2.990E+05
k = 6	n = 7	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	1.800E+05
h		2.990E+05	2.990E+05	2.990E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.920E+05
k = 8	n = 9	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	1.260E+05
h		1.920E+05	1.920E+05	1.920E+05	
		m / m' / L	m / m' / L	m / m' / L	1.340E+05
k = 10	n = 11	20 / / 2	20 / / 2	20 / / 2	9.370E+04
h		1.340E+05	1.340E+05	1.340E+05	

際の計算では，収束するための項の数が十個以上必要な場合には$m/2$個の項を取り入れ，また十個以下の場合には精度を考慮して，最低で十個取り入れた。また，解が収束するために必要な繰り返し計算の回数はLで示した。またべつに，比較のために解を求める法として，対応するmatrixをQR法で解いてhを求め，5個の解を載せている。

この論文の計算でも振動数として，β=0.19910E-6（一年周期），0.39820E-6（半年周期），0.72720E-4（一日周期），0.1454E-3（半日周期），0.14052E-3（太陰半日周期），0.21817E-3（1/3日周期）について調べた。また，東西方向の（角）波数kと南北方向の振動のモードnの差（$n-k$）の値が偶数か奇数かによって，HOUGH関数は赤道に対して対称か反対称かになる。そこで，赤道に対して対称の場合と反対称の場合についてもそれぞれ調べた。

Table 1では解が南北方向に対称な場合を，Table 2では反対称な場合を取り扱った。両表とも波数kを一定にして，いろいろなモードnに対する解をもとめた。すなわち，両表とも$k=1$の場合にはβ=0.39820E-6, 0.19910E-6，0.72720E-4を，$k=2$の場合にはβ=0.14544E-3，0.14052E-3を，$k=3$の場合にはβ=0.21817E-3を調べた。さらに，Table 1では$k=1$の場合にはn=1，3，5，(7)について，$k=2$の場合にはn=2，4，6，8について，$k=3$の場合にはn=3，5，7，9について調べた。Table 2では一年周期，半年周期，一日周期（$k=1$）の場合にはn=2，4，6を，半日周期，太陰半日周期（$k=2$）の場合にはn=3，5，7，9を，1/3日周期（$k=3$）の場合にはn=4，6，8，10について調べた。まず，一年周期，半年周期などの長周期の振動では結果が非常に悪く，殆ど収束しないか，収束してもQR法で求めた5個の解の中に殆どなかった。近似方法では(C1)は収束が悪すぎ，どちらかといえば(A2)，(B)，(C2)が良さそうである。一日周期では，nが小さい場合の解はQR法で得られた解と対応もよいが，nが大きくなるとQR法で得られた解との対応がはっきりしない。近似方法としては(A1)と(A3)が良さそうである。半日周期と太陰半日周期では(C1)だけを除けば，そのほかの方法では解は求まった。しかし，異なったnの値に対して同一の解が出てくる場合がある。1/3日周期では赤道に対して対称なモードでも反対称なモードでも，すべてのnに対して収束も速く，またQR法との一致も良かった。これらの結果を見て，次のTable 3以下では(A1)と(A2)についてのみ計算を行った。

Table 3ではkの別の値に対して，Table 1やTable 2と同じような計算を行った。計算結果は一年周期や半年周期の場合は収束が悪く，この表に載せなかった。一日周期では，対称モードで$k=3$対してn=3，5，7，9の場合を，また，反対称モードで$k=2$に対して上と同じnについて計算した。半日周期や太陰半日周期では，対称モードでは$k=3$を，反対称モードでは$k=2$を，またnについては両対称モードとも，n=3，5，7，9について解を求めた。1/3日周期の振動では，対称モードでは$k=4$の場合を，反対称モードでは$k=3$の場合を，また，nについては両モードともn=4，6，8，10について解を求めた。これらいずれの周期の場合も，計算の結果は定性的にTable 1とTable 2の対称，反対称モードの場合と殆ど同じであった。

Table 4は振動のモードnを一定にして，波数kをいろいろ変えた場合の解を調べた。一年周期や半年周期の場合には，やはり解の収束が悪く表には載せなかった。一日周期の対称モードでは$n=7$でk=1，3，5，7の場合を，反対称モードでは同じnについてk=2，4，6の場合の解を求めた。半日周期と太陰半日周期では対称モード，反対称モードとも$n=8$で，対称モードではk=2，4，6，8について，反対称モードではk=1，3，5，7について調べた。1/3日周期では両対称モードとも$n=9$で，対称モードではk=3，5，7，9の場合を，反対称モードではk=2，4，6，8の場合について調べた。一日周期での解は，すべてQR法で求めた解の中にはあるが，全体としてこれら二つの方法で得られた解の対応がはっきりしない。また，($n-k$)の差が小さいときは収束が速いが，($n-k$)が大きくなると(A2)では収束しない場合もあり，また(A1)でも収束は遅い。半日周期と太陰半日周期では収束は速く，一，二の例を除けばQR法での解との一致も良かった。1/3日周期では収束も速く，またQR法との比較も$k=3$，$n=9$の一例を除けば完全に一致した。

Table 5はnとkが等しい対称モードの場合を，Table 6はその差($n-k$)が1に等しい反対モードの場合を示す。結果は，一年周期や半年周期の解は収束があまり良くなく，また，得られた解もQR法で求めた5個の解の中にはなかった。一日周期では，いずれの場合にも解の収束性は良く，またQR法で求めた解の中にあった。半日周期，太陰半日周期，1/3日周期のいずれの場合も，収束は非常に速く，またQR法で求めた解と完全に一致した。

5. 結　論

このMFf法でも，前の論文(3)のLHK方法と殆ど同じ結果が得られた。すなわち，角振動数が高くなれば，continued fractionの収束も速く，また正確な解を得るための近似の回数も少なくて済み，正確な解が得られる頻度も高い。角振動数が低くなれば，解の収束も悪く，正確な解も得られにくい。同じようなことは，南北方向の振動のモードnと東西方向の波数kとの差$(n-k)$に対しても言える。すなわち，$(n-k)$が小さいときは，近似の回数も少なく，正確な解が得られる頻度も大きい。しかし，$(n-k)$が大きくなれば，解の収束も悪くなり，正確な解も得られにくい。近似の方法でとくに良い方法はなかったが，なかでも(A1)が少し良いように思われる。

文　献

HOUGH, S. S.(1897) : On the application of Harmonic analysis to the dynamaical theory of tides, Part I. On Laplace's 'oscillations of the first species', and on the dynamics of ocean currents. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A189**, 201–257.

HOUGH, S. S.(1898) : On the application of Harmonic analysis to the dynamaical theory of tides, Part II. On the general integration of Laplace's dynamical equations. Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A191**, 139 185.

古賀雅夫・後藤信行・松島晟(1991) : LaplaceのTidal equation－continued fractionによる解の収束性について－。La mer, **29**, 62–66.

松島晟・古賀雅夫・後藤信行(1991) : LaplaceのTidal equationの解－continued fraction法による固有値の計算で収束しない原因とその改良法－。La mer, **29**, 90–96.

松下晟・古賀雅夫(1992) : Laplaceの tidal equationの解(東西方向にzonalでない場合の解法 : continued fractionによる収束性)。La mer, **30**, 365–372.

1997年5月6日　受付
1997年8月15日　受理